



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
DEL ESTADO DEL MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

LÍMITES INVERSOS
GENERALIZADOS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRA EN CIENCIAS

PRESENTA:

MAT. KATIA NAYELI JAIMES
HERNÁNDEZ

TUTOR ACADÉMICO:

DR. ENRIQUE CASTAÑEDA ALVARADO

TUTOR ADJUNTO:

DR. FÉLIX CAPULÍN PÉREZ



Toluca, Estado de México

Índice general

Introducción	v
1. Conceptos básicos y notación	1
1.1. Resultados previos	3
2. Conexidad	7
2.1. La Conexidad en los límites inversos	7
2.2. Productos Ingram-Mahavier	34
2.2.1. Producto de Ingram-Mahavier	34
2.2.2. Propiedades de los productos IM	35
2.2.3. Límites Inversos Generalizados que son productos IM	42
2.2.4. Límites inversos conexos	45
3. No conexidad	53
3.1. Productos Ingram-Mahavier y CC-sucesiones	55
3.2. Bases componentes	57
3.2.1. Aplicaciones de Bases Componentes	67
3.2.2. Componentes grandes y chicas	73
3.2.3. Número de componentes de un límite inverso	77

Introducción

Los límites inversos han contribuido al desarrollo de la Teoría de Continuos, a partir de esto se pudo construir nuevos continuos y estudiar propiedades topológicas como conexidad, unicoherencia, encadenabilidad y más. Los límites inversos ordinarios se definieron a partir de funciones continuas, después se utilizan funciones conjunto-valuadas, a lo que les llaman límites inversos generalizados.

En esta tesis se pretende estudiar los límites inversos generalizados de manera particular analizaremos la propiedad de conexidad, mostraremos que condiciones son necesarias para que un límite inverso generalizado sea conexo. Analizamos algunos de los resultados más importantes que se han aportado acerca de este tema.

En el primer capítulo daremos los conceptos básicos, la notación y resultados importantes para los siguientes capítulos. En el capítulo dos mostraremos resultados sobre que condiciones un límite inverso generalizado es conexo. Y el último capítulo estudiamos condiciones para que el límite inverso sea no conexo, usando como herramienta a las CC-sucesiones introducidas por Sina Greenwood.

Capítulo 1

Conceptos básicos y notación

Dado X es un espacio topológico, 2^X es la colección de los subconjuntos cerrados no vacíos de X y $C(X)$ la colección de los conjuntos cerrados conexos de X . A una función $f : X \rightarrow 2^Y$ la llamaremos función conjunto-valuada.

Definición 1.1. *Un continuo es un espacio topológico conjunto conexo, compacto, métrico y no vacío.*

Definición 1.2. *Dada una función conjunto-valuada $f : X \rightarrow 2^Y$ si, X y Y son continuos, entonces llamaremos a f continuo-valuada.*

Definición 1.3. *Sean X y Y espacios compactos de Hausdorff, diremos que $f : X \rightarrow 2^Y$ es una función semicontinua superiormente en el punto $x \in X$, si para V abierto en Y que contenga a $f(x)$, existe un abierto U en X , con $x \in U$ tal que si $u \in U$ entonces $f(u) \subseteq V$, f es llamada semicontinua superiormente siempre que sea semicontinua superiormente en cada punto de X . La denotaremos como usc por sus siglas en inglés.*

Dada una función f usc, su gráfica la denotamos por $\Gamma(f)$ y la definimos como

$$\Gamma(f) = \{(x, y) \in X \times Y : y \in f(x)\}.$$

Diremos que f es sobreyectiva si para cada $y \in Y$, existe $x \in X$ tal que $y \in f(x)$. Además, la función $f^{-1} : Y \rightarrow 2^X$ es la inversa de f definida como

$$f^{-1}(y) = \{x \in X : y \in f(x)\}$$

para cada $y \in Y$ y su gráfica es

$$\Gamma^{-1}(f) = \{(y, x) : (x, y) \in G\}.$$

Dadas $f : X \rightarrow 2^Y$ y $g : X \rightarrow 2^Y$ dos funciones conjunto-valuadas, diremos que f y g tienen punto de coincidencia siempre que exista $x \in X$ tal que $f(x) \cap g(x) \neq \emptyset$.

Consideremos una sucesión de conjuntos compactos $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, entonces $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ es el producto de $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, con la topología producto. Cada elemento del producto lo denotamos como $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots)$. Para cada $i \in \mathbb{N}$, sea $\pi_i : \prod_{j=1}^{\infty} X_j \rightarrow X_i$, definida como $\pi_i(\mathbf{x}) = x_i$.

Si $m, n \in \mathbb{N}$ y $m \leq n$ entonces $[m, n] = \{i \in \mathbb{N} : m \leq i \leq n\}$. Supongamos que $X = \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ o $X = \prod_{[m, n]} X_i$ para algunos $m, n \in \mathbb{N}$. Sea $B = \{i_1, i_2, \dots\} \subset \mathbb{N}$, B puede ser finito o infinito, no se asume que los elementos de B están escritos de manera creciente. Entonces π_B denota la proyección de X sobre $\prod_{i \in B} X_i$. Es decir, si $\mathbf{x} \in X$ entonces $\pi_B(\mathbf{x}) = (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots)$. Si B solo tiene dos elementos, digamos $B = \{j, k\}$, escribimos simplemente $\pi_{j,k}$.

Definición 1.4. Sea $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones tal que para cada $i \in \mathbb{N}$, $f_i : X_{i+1} \rightarrow 2^{X_i}$ es una función conjunto-valuada. El límite inverso de la sucesión $\{f_i, X_i\}$ denotado por, $\varprojlim \{f_i, X_i\}$ es definido como

$$\varprojlim \{f_i, X_i\} = \left\{ \mathbf{x} \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i : x_i \in f_i(x_{i+1}) \text{ para cada } i \in \mathbb{N} \right\}.$$

Las funciones f_i son llamadas funciones de ligadura y cada espacio X_i es espacio factor. Para $m < n$, f_{mn} representa la composición de funciones, es decir, $f_{mn} = f_m \circ f_{m+1} \circ \dots \circ f_{n-1}$. La notación $\varprojlim f$ representa lo mismo que $\varprojlim \{f_i, X_i\}$ cuando los espacios factores son los mismos y las funciones de ligadura, son también la misma.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ representaremos por G_n al conjunto

$$\left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^n X_i : (x_{i+1}, x_i) \in G(f_i) \right\}.$$

Y por G'_n al conjunto:

$$G'_n = G_n \times \prod_{j=n+1}^{\infty} X_j$$

Definición 1.5. Si X es un espacio topológico diremos que C es una componente de X si es un subconjunto conexo máximo de X .

1.1. Resultados previos

A continuación mostraremos resultados importantes que nos ayudarán en los siguientes capítulos.

Teorema 1.1. Supongamos que X, Y son espacios compactos de Hausdorff y M un subconjunto de $X \times Y$, tal que para toda $x \in X$, existe $y \in Y$ con $(x, y) \in M$. Entonces M es cerrado si y sólo si existe una función usc $f : X \rightarrow 2^Y$ tal que $M = \Gamma(f)$.

Demostración. Primero demostraremos que si $f : X \rightarrow 2^Y$ es una función usc entonces $\Gamma(f)$ es cerrada. Sea $p = (p_1, p_2) \in X \times Y$, con $p \notin \Gamma(f)$. Entonces $p_2 \notin f(p_1)$, como los espacios compactos de Hausdorff son regulares, existen dos subconjuntos abiertos V y W en Y tales que $p_2 \in V$ y $f(p_1) \subseteq W$. Puesto que f es usc, existe un abierto U de X que contiene a p_1 tal que si $t \in U$ entonces $f(t) \subseteq W$. Así $U \times V$ es un abierto de $X \times Y$ que contiene a p y que no intersecta a $\Gamma(f)$. Por lo que $\Gamma(f)$ es cerrado.

Ahora supongamos que M es cerrado. Para cada $x \in X$ definamos

$$f(x) = \{y \in Y : (x, y) \in M\}.$$

Dado que M es cerrado, $f(x)$ es cerrado para cada $x \in X$. Veamos que f es usc,

sea $x \in X$ y V un abierto en Y con $f(x) \subseteq V$. Si f no fuera usc en x , entonces para todo abierto U , con $x \in U$, existen $z \in U$ y (z, y) tales que $y \notin V$.

Para cada abierto U que contiene a x , denotamos por $M_U = \{(p, q) \in M : p \in \bar{U} \text{ y } q \notin V\}$. Observemos que si U y U' son abiertos que contienen a x y $U \subseteq U'$, entonces $M_U \subseteq M_{U'}$. De esto se sigue que la colección \mathcal{M} de todos los conjuntos cerrados M_U tiene la propiedad de la intersección finita. Dado que $X \times Y$ es compacto, existe un punto (a, b) que está en todos los elementos de \mathcal{M} . Cada elemento de \mathcal{M} es un subconjunto de M , además (a, b) pertenece a M y $b \in f(a)$. Dado que x es el único punto para todos los conjuntos \bar{U} , $a = x$. Además, $b \notin V$. Esto contradice el hecho que $b \in f(x)$. \square

Con este teorema podemos asegurar que toda gráfica de una función usc es cerrada. El siguiente resultado ayudará a probar que el límite inverso es distinto del vacío.

Teorema 1.2. *Supongamos que $\{f_i, X_i\}$ es una sucesión inversa y para cada $i \in \mathbb{N}$, X_i es un espacio compacto de Hausdorff. Entonces $G'_n = G_n \times \prod_{i>n} X_i$ es un conjunto compacto, no vacío, para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Mostraremos que G'_n es cerrado para cada $n \in \mathbb{N}$. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $\mathbf{x} \in X \setminus G'_n$, entonces existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $x_i \notin f_i(x_{i+1})$. Por el Teorema 1.1, $\Gamma(f_i)$ es cerrada, entonces existe un conjunto abierto $U_{i+1} \times U_i \subseteq X_{i+1} \times X_i$ tal que $(U_{i+1} \times U_i) \cap \Gamma(f_i) = \emptyset$. Sea

$$O = X_1 \times X_2 \times \cdots \times U_i \times U_{i+1} \times \prod_{j>i+1} X_j,$$

que contiene a \mathbf{x} y si $\mathbf{y} \in O$ entonces $y_i \notin f_i(y_{i+1})$, es decir, $\mathbf{y} \notin G'_n$. Así G'_n es cerrado y como $\prod_{i>0} X_i$ es compacto y $G'_n \subseteq \prod_{i>0} X_i$, tenemos que G'_n es compacto.

Para ver que G'_n es distinto del vacío. Tomemos $\mathbf{y} \in \prod_{i>0} X_i$, donde sus coordenadas son elegidas de la siguiente manera, sea $y_n \in X_n$, para $0 < i < n$ sea $y_i \in X_i$ tal que $y_i \in f_i(y_{i+1})$ y para $i > n$ podemos tomar cualquier elemento de X_i . \square

Teorema 1.3. *Sea $\{X_i, f_i\}$ una sucesión, tal que X_i es un espacio de Hausdorff para todo $i \in \mathbb{N}$. Entonces $K = \varprojlim \{X_i, f_i\}$ es no vacío y compacto.*

Demostración. Por teorema anterior tenemos que G'_n es compacto y no vacío para cada $n \in \mathbb{N}$. Notemos que si $i < j$, entonces $G'_j \subseteq G'_i$, por lo que el conjunto $\{G'_n : n \in \mathbb{N}\}$ tiene la propiedad de la intersección finita. Así $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} G'_n$ es no vacío y compacto. Ahora veamos que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} G'_n = K.$$

Sea $\mathbf{x} \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G'_n$ entonces $\mathbf{x} \in G'_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De aquí $x_n \in f_n(x_{n+1})$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $\mathbf{x} \in K$.

Sea $\mathbf{x} \in K$, entonces $x_n \in f_n(x_{n+1})$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Así, $\mathbf{x} \in G'_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo que $\mathbf{x} \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G'_n$. \square

El siguiente teorema se utilizará en el siguiente capítulo. Su demostración se puede consultar en [9, Teorema 4.1, p. 122].

Teorema 1.4. *Supongamos que X y Y son espacios compactos de Hausdorff. Si X es conexo, $f : X \rightarrow 2^Y$ es usc, y para cada $x \in X$, $f(x)$ es conexo, entonces $\Gamma(f)$ es conexo.*

Teorema 1.5. *Supongamos que $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos cerrados de $[0, 1]$ y $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones usc sobreyectivas tal que $f_i : X_{i+1} \rightarrow 2^{X_i}$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Si $m, n \in \mathbb{N}$ con $m < n$ y $q \in X_m$, $p \in X_n$ con $q \in f_{mn}(p)$ entonces existe $\mathbf{x} \in \varprojlim \{X_i, f_i\}$ tal que $x_m = q$ y $x_n = p$.*

Demostración. Sean $m, n \in \mathbb{N}$ con $m < n$ y $q \in X_m$, $p \in X_n$ con $q \in f_{mn}(p)$. Si $1 \leq i \leq m$ entonces sea x_i tal que $x_i \in f_i(x_{i+1})$. Como $q \in f_{mn}(p)$, existe x_i tal que $x_i \in f_i(x_{i+1})$ con $m < i < n$. Dado que f_i es sobreyectiva para todo $i \in \mathbb{N}$, existe $x_{i+1} \in X_{i+1}$ tal que $x_i \in f_i(x_{i+1})$, para todo $i \geq n$. Sea

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, p, \dots, q, x_{n+1}, \dots),$$

notemos que \mathbf{x} cumple la definición de límite inverso. Por lo que $\mathbf{x} \in \varprojlim \{X_i, f_i\}$. \square

Proposición 1.1. *Sean $g, f : X \rightarrow 2^X$ funciones multivaluadas usc tales que $\Gamma(f) \subseteq \Gamma(g)$ entonces $\varprojlim \{X, f\} \subseteq \varprojlim \{X, g\}$.*

Demostración. Sea $\mathbf{x} \in \varprojlim\{X, f\}$, entonces $x_i \in f(x_{i+1})$ para toda $i \in \mathbb{N}$, de aquí que $(x_{i+1}, x_i) \in \Gamma(f)$ y como $\Gamma(f) \subseteq \Gamma(g)$ tenemos que $(x_{i+1}, x_i) \in \Gamma(g)$, así $x_i \in g(x_{i+1})$ para toda $i \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $\mathbf{x} \in \varprojlim\{X, g\}$. \square

Capítulo 2

Conexidad

En este capítulo mostraremos algunos resultados sobre la conexidad de los límites inversos generalizados. Veremos la relación entre ellos y ejemplos para entenderlos mejor.

2.1. La Conexidad en los límites inversos

Los primeros resultados sobre conexidad en límites generalizados fueron dados por T. W. Ingram y W. S. Mahavier en [6] y [9]. A continuación damos resultados previos para llegar al teorema principal.

Teorema 2.1. *Supongamos que X y Y son espacios compactos de Hausdorff, Y es conexo, $f : X \rightarrow 2^Y$ es función usc tales que para cada $y \in Y$, $\{x \in X : y \in f(x)\}$ es no vacío y conexo. Entonces $\Gamma(f)$ es conexo.*

Demostración. Sea $M = \Gamma^{-1}(f)$. Obsevemos que M es cerrado si y solo si M^{-1} es cerrado. Por el Teorema 1.1 M^{-1} es gráfica de una función usc continuo-valuada definida de Y a 2^X . Por el Teorema 1.4 M^{-1} es conexo. \square

Teorema 2.2. *Supongamos que $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de espacios continuos de Hausdorff y $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones de ligadura usc tal que $f_{i+1} : X_{i+1} \rightarrow 2^{X_i}$. Si $f_i(x)$ es conexo para cada $x \in X_{i+1}$. Entonces G_n es conexo para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. La prueba se hará por inducción sobre n . Para $n = 1$ el resultado se cumple por Teorema 1.4. Supongamos que se cumple el teorema para n . Por hipótesis de inducción el conjunto:

$$G_{2,n+1} = \{(x_2, x_3, \dots, x_{n+1}) \in \prod_{i \geq 2}^{n+1} X_i : x_i \in f_i(x_{i+1})\}$$

es conexo.

Si H y K son conjuntos cerrados tales que $G_{n+1} = H \cup K$ y $h : G_{n+1} \rightarrow G_{2,n+1}$ es una función definida como $h((x_1, x_2, \dots, x_{n+1})) = (x_2, \dots, x_{n+1})$, entonces h es continua y $h(H \cup K) = G_{2,n+1}$. Así, existe $p \in h(H) \cap h(K)$ y el conjunto

$$\{x \in G_{n+1} : x_1 \in f_1(p_2) \text{ y } x_i = p_i \text{ para } 2 \leq i \leq n+1\}$$

es un conjunto conexo que intersecta a los conjuntos H y K . De aquí que H y K no son disjuntos. Por lo tanto G_{n+1} es conexo. \square

Teorema 2.3. *Supongamos que para cada $i \in \mathbb{N}$, X_i es un continuo de Hausdorff y para cada $x \in X_{i+1}$, $f_i(x)$, es conexo. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, G'_n es conexo.*

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$. Por el Teorema 2.2 se tiene que G_n es conexo y dado que X_i es conexo para cada $i \in \mathbb{N}$. Se tiene que G'_n es conexo. \square

Teorema 2.4. *Supongamos que $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de continuos de Hausdorff y $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones usc tales que $f_i : X_{i+1} \rightarrow 2^{X_i}$ y para cada $x_i \in X_i$, $\{x_{i+1} \in X_{i+1} : x_i \in f_i(x_{i+1})\}$ es no vacío y conexo o bien $f_i^{-1}(x_i)$ es no vacío y conexo, entonces G_n es conexo.*

Demostración. El resultado lo mostraremos por inducción. Lo haremos por inducción. Para $n = 1$ el resultado se cumple por el Teorema 2.1. Supongamos que el resultado se cumple para n . Sean H y K son conjuntos cerrados tal que $G_{n+1} = H \cup K$. Definimos la siguiente función $h : G_{n+1} \rightarrow G_n$ como

$$h((x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})) = (x_1, \dots, x_n),$$

notemos que h es continua, entonces

$$h(H \cup K) = h(H) \cup h(K) = G_n,$$

dado que por hipótesis de inducción G_n es conexo, por lo que existe $p \in h(H) \cap h(K)$. El conjunto

$$\{\mathbf{x} \in G_{n+1} : x_i = p_i, 1 \leq i \leq n, \text{ y } x_n \in f_n(x_{n+1})\}$$

es conexo que intersecta a H y K . Por lo que H y K no son disjuntos. \square

Teorema 2.5. *Supongamos que para cada $i \in \mathbb{N}$, X_i es un continuo de Hausdorff, $f_i : X_{i+1} \rightarrow 2^{X_i}$ es usc y para cada $x_i \in X_i$, $\{x_{i+1} \in X_{i+1} : x_i \in f_i(x_{i+1})\}$ es no vacío y conexo. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, G'_n es conexo.*

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$. Por el Teorema 2.4 2.2 se tiene que G_n es conexo y dado que X_i es conexo para cada $i \in \mathbb{N}$. Se tiene que G'_n es conexo. \square

De los teoremas 2.3 y 2.5 se puede concluir los siguientes resultados.

Teorema 2.6. *Supongamos que para cada $i \in \mathbb{N}$, X_i es un continuo de Hausdorff, $f_i : X_{i+1} \rightarrow 2^{X_i}$ es usc y para cada $x_i \in X_i$, $f_i(x_i)$ es conexo. Entonces $\varprojlim \{f_i, X_i\}$ es un continuo de Hausdorff.*

Demostración. Por el Teorema 1.3 para cada $i \in \mathbb{N}$, G'_n es compacto y por el Teorema 2.3, G'_n es conexo y como $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} G'_n = \varprojlim \{f_i, X_i\}$ se tiene que $\varprojlim \{f_i, X_i\}$ es un continuo de Hausdorff. \square

Teorema 2.7. *Supongamos que para cada $i \in \mathbb{N}$, X_i es un continuo de Hausdorff, $f_i : X_{i+1} \rightarrow 2^{X_i}$ es usc y para cada $x_i \in X_i$, $\{x_{i+1} \in X_{i+1} : x_i \in f_i(x_{i+1})\}$ es no vacío y conexo. Entonces, $\varprojlim \{f_i, X_i\}$ es un continuo de Hausdorff.*

Demostración. Por el Teorema 1.3, para cada $i \in \mathbb{N}$, G'_n es compacto y del Teorema 2.5 G'_n es conexo y como

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} G'_n = \varprojlim \{f_i, X_i\}$$

se tiene que $\varprojlim \{f_i, X_i\}$ es un continuo de Hausdorff. \square

En [11] T. W. Ingram prueba el siguiente resultado.

Teorema 2.8. *Supongamos que $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos cerrados de $[0, 1]$ y $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones usc tal que $f_i : X_{i+1} \rightarrow 2^{X_i}$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Entonces, $\varprojlim \{f_i, X_i\}$ es un continuo si y solo si G'_n es conexo para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Sea $K = \varprojlim \{f_i, X_i\}$, por el Teorema 1.3,

$$K = \bigcap_{n > 0} G'_n$$

y G'_n es compacto para cada $n \in \mathbb{N}$. Si G_n es conexo para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces K es un continuo, por ser la intersección de continuos anidados.

Si suponemos que K es conexo, entonces $\pi_{1,n+1}(K)$ es conexo para cada $n \in \mathbb{N}$ y como

$$G'_n = \pi_{1,n+1}(K) \times \prod_{i > n+1} X_i,$$

G'_n es conexo. □

A continuación mostramos un ejemplo donde el límite inverso es conexo, como consecuencia de los teoremas anteriores.

Ejemplo 2.1. *Consideremos la siguiente función $f : [0, 1] \rightarrow 2^{[0,1]}$ dada por*

$$f(t) = \begin{cases} [0, \frac{1}{2}] & \text{si } t = 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 0 < t < 1 \\ [\frac{1}{2}, 1] & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

Sea $M = \varprojlim \{X_i, f_i\}$, donde $X_i = [0, 1]$ y $f_i = f$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Ver Figura 2.1. Nótese que se cumplen las hipótesis del Teorema 2.3, y por lo tanto M es conexo.

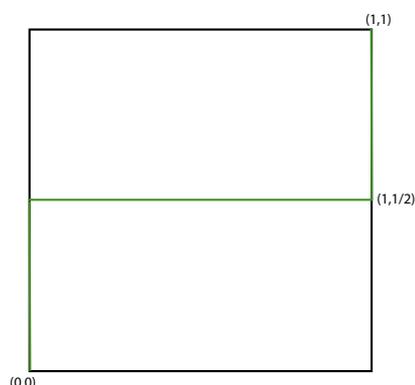


Figura 2.1: $\Gamma(f)$

Ejemplo 2.2. Sea $f : [0, 1] \rightarrow 2^{[0,1]}$ definida como $f(x) = \{0, x\}$, ver Figura 2.2 del lado izquierdo. Notemos que la imagen de cada punto del dominio de f no necesariamente es un conjunto conexo. Sin embargo si obtenemos a f^{-1} , ver Figura 2.2 del lado derecho. Observamos que la imagen de cada elemento del dominio de f^{-1} es un conjunto conexo, de esta manera el Teorema 2.7 garantiza que el $\varprojlim f$ es conexo.

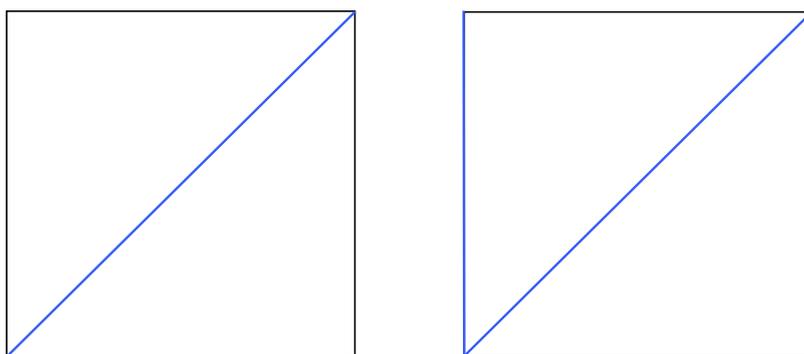


Figura 2.2: $\Gamma(f)$ y $\Gamma(f^{-1})$

El siguiente ejemplo muestra que las hipótesis de los Teoremas 2.6 y 2.7, no son necesarias para que el límite inverso sea conexo.

Ejemplo 2.3. Sea $f : [0, 1] \rightarrow 2^{[0,1]}$ dada por $f(t) = \{t, 1 - t\}$, ver Figura 2.3. Sea $K = \varprojlim \{X_i, f_i\}$, donde $X_i = [0, 1]$ y $f_i = f$ para cada $i \in \mathbb{N}$.

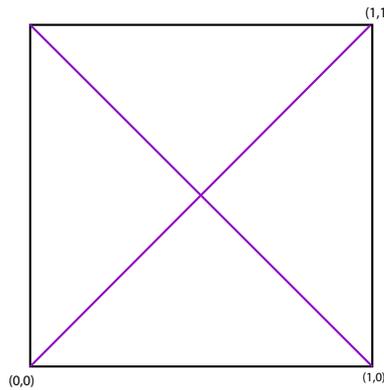


Figura 2.3: $\Gamma(f)$

Notemos que la función de ligadura f no cumple con las condiciones de los Teoremas 2.5 y 3.6, existen $x \in [0, 1]$ tales que $f(x)$ no es conexo y $y \in [0, 1]$ tales que $f^{-1}(y)$ no es conexo.

No es difícil ver que K es homeomorfo al abanico de Cantor, donde $\mathbf{v} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots)$ es el vértice y la base del abanico es homeomorfo al conjunto de Cantor dado por $\varprojlim \{\{0, 1\}, f|_{\{0,1\}}\}$. Si $c \in \mathbf{C}$ el arco que une a c y \mathbf{v} es el límite inverso $\varprojlim \{J_i, g_i\}$, donde para cada $i \in \mathbb{N}$, J_i es el intervalo que une a c_i y $\frac{1}{2}$ y g_i es el homeomorfismo que tiene como punto fijo a $\frac{1}{2}$ y $\Gamma(g_i) \subset \Gamma(f)$.

Con los ejemplos anteriores podemos darnos cuenta que no son suficientes las condiciones. Sin embargo mas adelante veremos mas resultados.

Ingram siguió trabajando sobre conexidad en límites inversos pero con una sola función de ligadura y que su gráfica se vea como unión de graficas de funciones y con puntos de coincidencia. A continuación los mostramos y se puede consultar en [6].

Lema 2.1. Supongamos que $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de espacios compactos de Hausdorff y $f_i : X_{i+1} \rightarrow 2^{X_i}$ es usc para cada $i \in \mathbb{N}$. Si $n \in \mathbb{N}$, $g : X_{n+1} \rightarrow 2^{X_n}$ es usc tal que f_n y g tienen puntos de coincidencias, f_i es sobreyectiva para cada $i \geq n$, y $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones tal que $\varphi_i = f_i$, para $i \neq n$ y $\varphi_n = g$, entonces $\varprojlim\{X_i, f_i\}$ y $\varprojlim\{X_i, \varphi_i\}$ tienen un punto en común.

Demostración. Puesto que f_n y g tienen punto de coincidencia, existe $t \in X_{n+1}$ tal que $f_n(t) \cap g(t) \neq \emptyset$, sea $z \in f_n(t) \cap g(t)$. Dado que f_i es sobreyectiva para $i > n$, por el Teorema 1.5, existe $\mathbf{x} \in \varprojlim\{X_i, f_i\}$ tal que $x_{n+1} = t$ y $x_n = z$ y como $z \in g(t)$, por lo tanto $\mathbf{x} \in \varprojlim\{X_i, \varphi_i\}$. \square

Definición 2.1. Supongamos que X, Y son espacios compactos de Hausdorff y \mathcal{F} es una colección de funciones conjunto-valuadas que van de X a 2^Y . Una función $f \in \mathcal{F}$ es universal con respecto a \mathcal{F} si tiene puntos de coincidencia con cada elemento de \mathcal{F} .

Definición 2.2. Sean $f : X \rightarrow 2^Y$ y $g : X \rightarrow 2^Y$, y $\Gamma(f), \Gamma(g)$ sus gráficas correspondientes. Diremos que $h : X \rightarrow 2^Y$ es unión de las funciones f y g si su gráfica es la

Teorema 2.9. Si $\mathcal{F} = \{g : X \rightarrow C(X) : g \text{ usc}\}$ y $f_1 \in \mathcal{F}$ una función sobreyectiva y universal respecto a \mathcal{F} y $f : X \rightarrow 2^X$ es una función tal que es unión de las gráficas de las funciones en \mathcal{F} . Además si $f_i = f$ para cada $i \in \mathbb{N}$ entonces $\varprojlim\{X, f\}$ es un continuo.

Demostración. Demostraremos la conexidad. Sea $f_1 \in \mathcal{F}$ universal con respecto a \mathcal{F} y sobreyectiva. Sean $\mathbf{x} \in \varprojlim\{X, f_1\}$ y $\mathbf{y} \in \varprojlim\{X, f\}$, entonces $y_i \in f(y_{i+1})$ para toda $i \in \mathbb{N}$, como f es unión de las gráficas de las funciones de \mathcal{F} , existe $\varphi_1, \varphi_2, \dots \in \mathcal{F}$ una sucesión tal que $y_i \in \varphi_i(y_{i+1})$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Definimos los siguientes conjuntos

$$C_1 = \varprojlim\{X, f_1\}$$

y para $n > 1$,

$$C_n = \varprojlim\{X, g\},$$

donde g es la sucesión

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}, f_1, f_1, \dots,$$

como podemos ver en el siguiente diagrama

$$X_1 \longleftarrow X_2 \longleftarrow X_3 \longleftarrow \cdots \longleftarrow X_{n-1} \longleftarrow X_n \longleftarrow \cdots$$

Por el Teorema 2.6 C_n es un continuo para cada $n \in \mathbb{N}$, pues las funciones de ligadura son continuo-valuadas. Ahora, por el Lema 2.1, $C_n \cap C_{n+1} \neq \emptyset$, pues f_1 es universal y tiene punto de coincidencia con φ_i para toda $i \in \mathbb{N}$. Así, $C = \bigcup_{i>0} C_i$ es un conjunto conexo. Dado que f_1 es sobreyectiva, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $\mathbf{p}^n \in C_n$ tal que $\pi_i(\mathbf{p}^n) = y_i$ con $i \leq n$, es decir,

$$\mathbf{p}^n = (y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n, p_{n+1}^n, p_{n+2}^n, \dots)$$

de aquí que $\mathbf{p}^n \in C_n$, es decir, $\pi_i^{-1}(y_i)$ es un subbásico tal que $\pi_i^{-1}(y_i) \cap C_n \neq \emptyset$ o bien $\pi_i^{-1}(y_i) \cap C \neq \emptyset$, pues $C_n \subset C$ por lo que $\mathbf{y} \in \overline{C}$ con $\mathbf{x} \in \overline{C}$. Dado que C es conexo, \overline{C} es conexo. Por tanto $\varprojlim\{X, f\} \subseteq \overline{C}$.

Por otra parte tenemos que $\Gamma(f)$ es la unión de las funciones de \mathcal{F} , entonces $\Gamma(\varphi_i) \subseteq \Gamma(f)$ para toda $i \in \mathbb{N}$ y $\Gamma(f_1) \subseteq \Gamma(f)$, por lo que $C_n \subseteq \varprojlim\{X, f\}$ para toda $n \in \mathbb{N}$, por la Propiedad 1.1

$$C = \bigcup_{i>0} C_i \subseteq \varprojlim\{X, f\},$$

por lo tanto $C \subset \varprojlim\{X, f\} \subset \overline{C}$. Con lo que concluimos $\varprojlim\{X, f\}$ es conexo. \square

Retomando el Ejemplo 2.3 podemos aplicar el teorema anterior ya que se cumple con todas las hipótesis. Y por lo tanto K es conexo.

Ejemplo 2.4. Sean g_1 definida como

$$g_1(x) = \begin{cases} \{0, x\} & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{4} < x < 1 \\ [0, 1] & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Y g_2 como

$$g_2(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{3}{4} \\ 2x - \frac{5}{4} & \text{si } \frac{3}{4} < x < \frac{7}{8} \\ -4x - 3 & \text{si } \frac{7}{8} < x < 1 \end{cases}$$

Sea $\mathcal{F} = \{g_1, g_2\}$, la gráfica de \mathcal{F} se ve en la Figura 2.4.

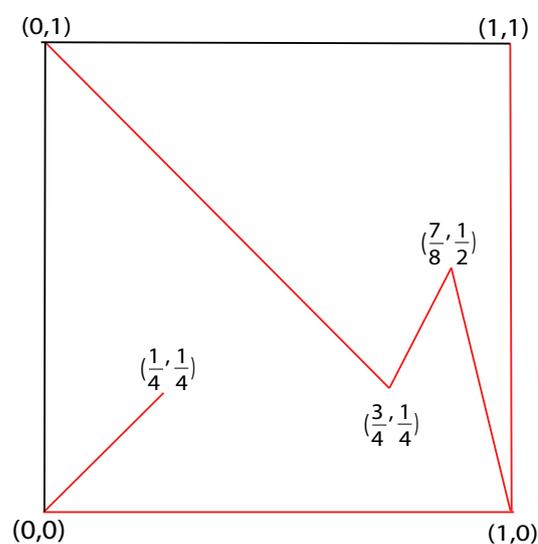


Figura 2.4: La gráfica de \mathcal{F}

Si $f = \Gamma(g_1) \cup \Gamma(g_2)$, entonces $\varprojlim \{X, f\}$ no es conexo, pues podemos ver que existe $x \in [0, 1]$ tal que $g_1(x)$ no es conexo.

A continuación daremos otras condiciones para obtener un límite inverso conexo que también fue hecho por Ingram T. W. en [6], pero previamente daremos un lema.

Lema 2.2. Sean $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es una función continua tal que

$$f^2([0, 1]) = f([0, 1]),$$

si $t \in f([0, 1])$, y $f_i = f$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Entonces existe $\mathbf{x} \in \varprojlim \{[0, 1], f\}$ tal

que $x_1 = t$.

Demostración. Sean $t \in f([0, 1])$ y $x_1 = t$. Como $f(f([0, 1])) = f([0, 1])$ y $t \in f([0, 1])$, existe $x_2 \in f([0, 1])$ tal que $f(x_2) = x_1$. De manera similar, puesto que $x_2 \in f([0, 1]) = f(f([0, 1]))$, existe $x_3 \in f([0, 1])$, tal que $f(x_3) = x_2$. Continuando de esta manera obtenemos $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in \varprojlim \{X, f\}$, con $x_1 = t$. \square

Teorema 2.10. *Supongamos que \mathcal{F} es una colección de funciones continuas de $[0, 1]$ a $[0, 1]$ tal que $f_1 \in \mathcal{F}$ cumple con las siguientes condiciones:*

1. $f_1([0, 1])$ es no degenerado.
2. Si $g \in \mathcal{F}$, existe un punto $p_g \in f_1([0, 1])$, tal que $f_1(p_g) = g(p_g)$.
3. Si $g \in \mathcal{F}$ entonces $g(f_1([0, 1])) = g([0, 1])$.

Si f es una función tal que es unión de las gráficas de las funciones en \mathcal{F} y $f_i = f$ para cada $i \in \mathbb{N}$ entonces $\varprojlim \{X, f\}$ es un continuo.

Demostración. Sea $\mathbf{y} \in \varprojlim \{X, f\}$. Existe una sucesión $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ tal que $\varphi_i \in \mathcal{F}$ y $\varphi_i(y_{i+1}) = y_i$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Sea

$$C_1 = \varprojlim \{X, f_1\}$$

y para cada $n \in \mathbb{N}$, C_n es el límite inverso cuya sucesión de las funciones de ligadura están dadas por

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}, f_1, f_1, \dots$$

Usando la condición (2) y aplicando el Lema 2.1 tenemos que $C_i \cap C_{i+1} \neq \emptyset$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Así $C = \bigcup_{i>0} C_i$ es conexo. Si $t = y_n$, por el Lema 2.2 existe $\mathbf{x} \in \varprojlim \{X, f_1\}$ tal que $x_1 = y_n$. El punto $\mathbf{p}_n = (y_1, y_2, \dots, y_n, x_2, x_3, \dots)$ está en C_n y

$$d(\mathbf{y}, \mathbf{p}_n) < \frac{1}{2^n}.$$

Así, $\varprojlim \{X, f\} \subset \overline{C}$, pero $C \subset \varprojlim \{X, f\}$. Por lo tanto, $\varprojlim \{X, f\}$ es un continuo. \square

Van Nall en [12] se muestran resultados relacionados sobre conexidad en donde se consideran con límites inversos con una sola función de ligadura cuya gráfica se puede ver como la unión de otras gráficas de funciones, como lo podemos ver en seguida.

Teorema 2.11. *Supongamos que X es compacto y métrico, y $\{F_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ es una colección de subconjuntos cerrados de $X \times X$ tal que para cada $x \in X$ y para cada $\alpha \in \Lambda$, el conjunto $\{y \in X : (x, y) \in F_\alpha\}$ es no vacío y conexo. Si $F = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} F_\alpha$ es un subconjunto cerrado y conexo de $X \times X$, y para cada $y \in X$, el conjunto $\{x \in X : (x, y) \in F\}$ es no vacío. Entonces $\varprojlim F$ es conexo.*

Demostración. Renombramos $G_1 = X$ y para cada $n > 1$, sea

$$G_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^n X_i : (x_{i+1}, x_i) \in F \text{ para } i = 1, \dots, n-1\}$$

y para cada $n > 1$ y $\alpha \in \Lambda$, sea

$$G_{n,\alpha} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in G_n : (x_2, x_1) \in F_\alpha\}.$$

Entonces, cada G_n es compacto y $G_n = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} G_{n,\alpha}$.

Notemos que G_2 es homeomorfo a F . Así G_1 y G_2 son conexos. Supongamos que para $n > 2$, G_{n-1} es conexo. Sea $\Psi_\alpha : G_{n,\alpha} \rightarrow G_{n-1}$ la función continua definida por $\Psi_\alpha(\mathbf{x}) = \pi_{2,n}(\mathbf{x})$. Si $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) \in G_{n-1}$, entonces $\Psi_\alpha^{-1}(\mathbf{y}) = \{(z, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) : (y_1, z) \in F_\alpha\}$ es homeomorfo a $\{z : (y_1, z) \in F_\alpha\}$, lo cual por hipótesis es conexo y no vacío. Además, Ψ_α es una función monótona y sobreyectiva definida en un conjunto compacto y conexo. Se sigue que $G_{n,\alpha}$ es conexo para cada $\alpha \in \Lambda$.

Como para cada $y \in X$ el conjunto $\{x \in X : (x, y) \in F\}$ es no vacío, tenemos que $\pi_i(G_n) = X$ y $\pi_{1,2}(G_n)$ es F^{-1} . Ahora supongamos que H y K son subconjuntos cerrados no vacíos de G_n tales que $G_n = H \cup K$. Sea

$$H^* = \{(a, b) \in F : \text{existe } (y_1, y_2, \dots, y_n) \in H \text{ tal que } b = y_1 \text{ y } a = y_2\},$$

y sea

$$K^* = \{(a, b) \in F : \text{existe } (y_1, y_2, \dots, y_n) \in K \text{ tal que } b = y_1 \text{ y } a = y_2\},$$

como K^* y H^* , son proyecciones de H y K , sobre las dos primeras coordenadas K^* y H^* son la imagen continua de H y K y además son conjuntos cerrados y no vacíos cuya unión es el conexo F . Por lo que $H^* \cap K^* \neq \emptyset$.

Sea $(c, d) \in H^* \cap K^*$, existe $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in H$ tal que $y_1 = c$ y $y_2 = d$, también existe $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in K$ tal que $z_1 = c$ y $z_2 = d$ y existe $\alpha \in \Lambda$ tal que $(d, c) \in F_\alpha$. De este modo el conjunto conexo $G_{n,\alpha}$ que es subconjunto de G_n contiene a \mathbf{y} y \mathbf{z} . Se sigue que G_n es conexo. Así por inducción tenemos que G_n es conexo para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$G_n^* = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in \prod_{i=1}^{\infty} X : (x_1, x_2, \dots, x_n) \in G_n\}.$$

Nótese que

$$G_n^* = \pi_1(G_n) \times \pi_2(G_n) \times \dots \times \pi_n(G_n) \times X \times \dots$$

así G_n^* es producto numerable de conjuntos conexos y compactos. Entonces G_n^* es compacto y conexo para cada $n \in \mathbb{N}$. Además, para cada $m < n$, $G_n \subset G_m$ y $\lim_{\leftarrow} F = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n^*$, se tiene que $\lim_{\leftarrow} F$ es conexo. \square

Comparando los Teoremas 2.9 y 2.11 vemos que la diferencia está en que en 2.9 necesariamente debe existir una función universal y el caso de 2.11 no, aunque para ambos casos si debe ocurrir que las imágenes de las funciones deben mandar a conjuntos conexos. A continuación presentamos un ejemplo donde no se cumplen las condiciones del Teorema 2.9 pero si las del Teorema 2.11 y que por lo tanto el límite inverso es conexo.

Ejemplo 2.5. Sea $\{f_i\}_{i=0}^{\infty}$ dada por $f_i(x) = \frac{1}{i} + x(\frac{1}{i+1} - \frac{1}{i})$ para $0 \leq x \leq 1$ con i impar, $f_i(x) = \frac{1}{i+1} + x(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1})$ para $0 \leq x \leq 1$ con i par, $f_0(x) = 0$ para $0 \leq x \leq 1$, ver Figura 2.5. Notemos que $\{f_i\}_{i=0}^{\infty}$ cumple con las condiciones del Teorema 2.11 por lo que $\lim_{\leftarrow} \bigcup_{i \geq 0} f_i$ es conexo, pero no existe una función universal que cumpla el Teorema 2.9.

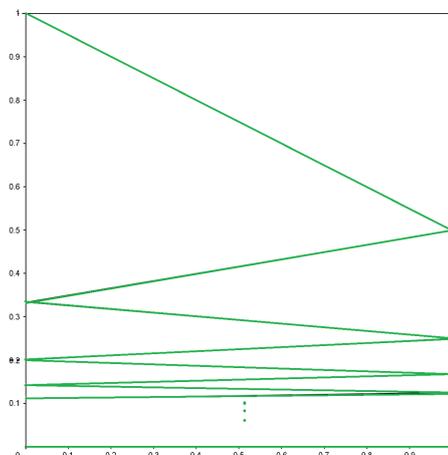


Figura 2.5: Gráfica de $\bigcup_{i \geq 0} f_i$

El siguiente resultado demuestra que el límite inverso es conexo con una sola función de ligadura si y sólo si para cada $n \in \mathbb{N}$, G_n es conexo. En 2.8, Ingram demostró lo mismo pero para una sucesión de funciones que no necesariamente es la misma.

Lema 2.3. *Supongamos que X es un continuo de Hausdorff, $f : X \rightarrow 2^X$ una función usc y para cada n ,*

$$G_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^n X : x_i \in f(x_{i+1}) \text{ para } i = 1, 2, \dots, n-1\}.$$

Entonces, $\varprojlim f$ es conexo si y sólo si G_n es conexo para cada n .

Demostración. Supongamos que $\varprojlim f$ es conexo, observemos que

$$G_n = \pi_{1,n}(\varprojlim f),$$

como $\pi_{1,n}$ es una función continua y $\varprojlim f$ es conexo entonces G_n es conexo.

Ahora supongamos que G_n es conexo, por el Teorema 2.11, $\varprojlim f$ es conexo. \square

Ejemplo 2.6. *Sea $f : [0, 1] \rightarrow 2^{[0,1]}$ una función usc cuya gráfica está dada por la unión de los siguientes conjuntos:*

$$A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1 \text{ y } y = \frac{1}{2}x\}$$

y

$$B = \{(x, y) : \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \text{ y } y = 2x - 1\}.$$

En la Figura 2.6, A es la gráfica de f_1 y B es la gráfica de la función f_2 . La función f es usc porque su gráfica es compacta y conexa, es fácil ver que la gráfica de $f \circ f$ no es conexa, ver Figura 2.7, debido a que el punto $(1, 0)$ es un punto aislado en la gráfica de $f \circ f$. Por lo tanto $\varprojlim\{X, f\}$, por el Lema 2.3, no es conexo.

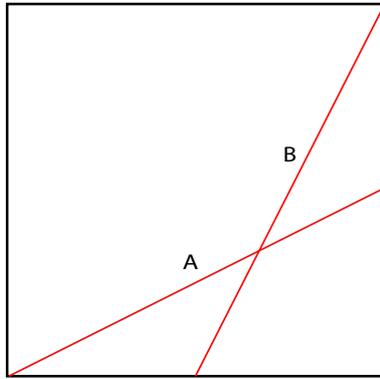


Figura 2.6: Gráfica de f

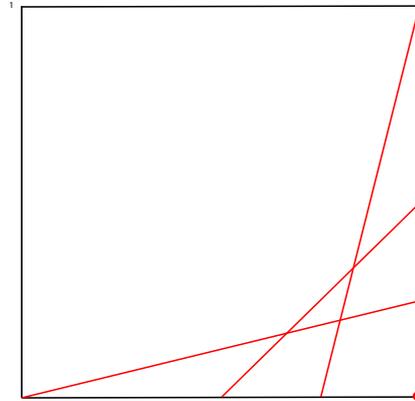


Figura 2.7: Gráfica de f^2

Es el siguiente resultado una consecuencia del Lema 2.3 este establece una relación entre la función de ligadura f y f^{-1} .

Teorema 2.12. *Supongamos que X es un continuo de Hausdorff, $f : X \rightarrow 2^X$ una función sobreyectiva usc. Entonces $\varprojlim f$ es conexo si y sólo si $\varprojlim f^{-1}$ es conexo.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean

$$G_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^n X : x_i \in f(x_{i+1}) \text{ para } i = 1, 2, \dots, n-1\}$$

$$G_n^{-1} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^n X : x_i \in f^{-1}(x_{i+1}) \text{ para } i = 1, 2, \dots, n-1\},$$

entonces $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in G_n$ si y sólo si $(x_n, x_{n-1}, \dots, x_1) \in G_n^{-1}$. Notemos que G_n es homeomorfo a G_n^{-1} . Además, por Lema 2.3, $\lim_{\leftarrow} f$ es conexo si y sólo si G_n es conexo para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{\leftarrow} f^{-1}$ es conexo si y sólo si G_n^{-1} es conexo para cada $n \in \mathbb{N}$. De aquí que $\lim_{\leftarrow} f$ es conexo si y sólo si $\lim_{\leftarrow} f^{-1}$ es conexo. \square

Ejemplo 2.7. Consideremos la función f dada en el Ejemplo 2.6. Definimos los siguientes conjuntos, ver Figura 2.8.

$$A_1 = \{(x, y) \in A : x \leq \frac{2}{3}\}, \quad A_2 = \{(x, y) \in A : x \geq \frac{2}{3}\}.$$

$$B_1 = \{(x, y) \in B : x \leq \frac{2}{3}\}, \quad B_2 = \{(x, y) \in B : x \geq \frac{2}{3}\}.$$

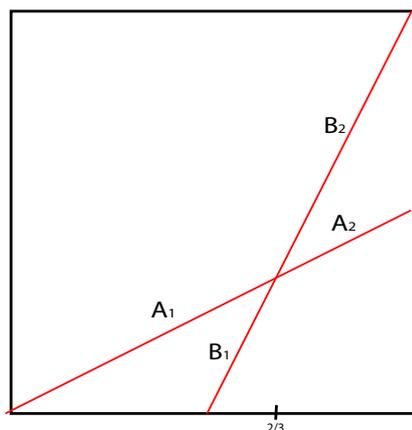


Figura 2.8: $\Gamma(f) = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$

Consideremos F_1 una función usc tal que su gráfica es $A \cup (A_1 \cup B_2)$ por Teorema 2.11

$$\lim_{\leftarrow} F_1$$

es conexo. Ahora si al conjunto $A \cup (A_1 \cup B_2)$ unimos B_1 obtenemos la gráfica

de la función usc $F_2 = f$ por lo que

$$\lim_{\leftarrow} F_2$$

no es conexo.

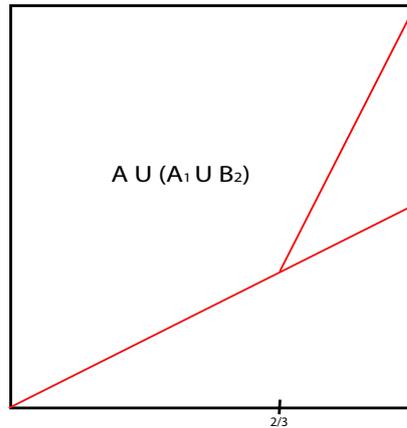


Figura 2.9: $A \cup (A_1 \cup B_2)$

De manera similar usando Teorema 2.11 y el Teorema 2.3, se puede ver que si G_1 es una función usc cuya gráfica es $A_1 \cup B$ entonces $\lim_{\leftarrow} G_1$ es conexo pero si G_2 es una función usc que tiene por gráfica la unión de $A_1 \cup B$ con A_2 entonces

$$\lim_{\leftarrow} G_2 = \lim_{\leftarrow} f$$

no es conexo. Esto demuestra que es necesario suponer que el dominio de cada función es todo X en el Teorema 2.11.

También $A_1 \cup B$ es la gráfica de una función usc con límite inverso conexo, pues el límite inverso con la función inversa de $A_1 \cup B$ (ver Figura 2.11) es conexo por el Teorema 2.12, es conexo. Ahora si se agrega A_2 para completar A , vemos que la función está definido en todo $[0, 1]$ con límite inverso no conexo.

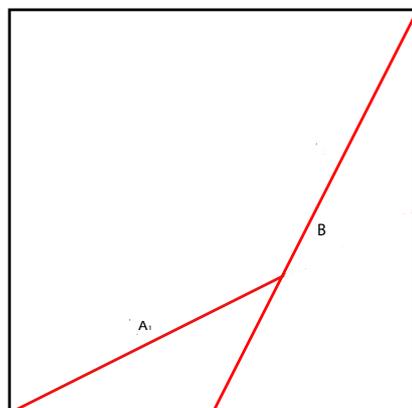


Figura 2.10: $A_1 \cup B$

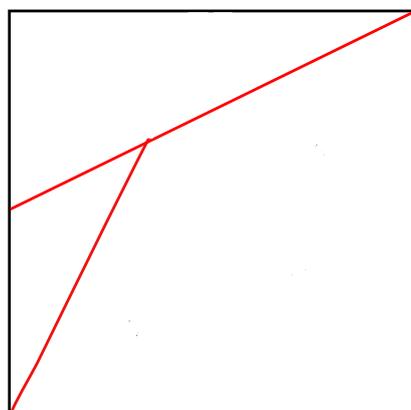


Figura 2.11: Gráfica de la función inversa de $A_1 \cup B$

Del ejemplo anterior surge la siguiente pregunta, ¿si $\lim_{\leftarrow} f$ es conexo entonces que clase de conjunto se puede agregar a la gráfica de f para que el límite inverso siga siendo conexo? El siguiente teorema da respuesta parcial a esta pregunta. Para ello necesitamos de la siguiente definición.

Definición 2.3. Dado un continuo X , y enteros m, n , entonces

$$\bigoplus : \prod_{i=1}^n X_i \times \prod_{i=1}^m X_i \rightarrow \prod_{i=1}^{n+m} X_i,$$

se define como

$$(x_1, \dots, x_n) \oplus (y_1, \dots, y_m) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$$

Teorema 2.13. Supongamos X es un continuo de Hausdorff y $f : X \rightarrow 2^X$ es una función usc sobreyectiva tal que $\varprojlim f$ es conexo, $g : X \rightarrow X$ es una función continua tal que $fg = gf$ y las gráficas de f y g no son disjuntas. Entonces $\varprojlim f \cup g$ es conexo.

Demostración. Para cada $n > 1$, sean

$$G_n(f \cup g) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^n X : x_i \in f \cup g(x_{i+1}) \text{ para } 1 \leq i < n\},$$

y

$$G_n(f) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in G_n(f \cup g) : x_i \in g(x_{i+1}) \text{ para cada } i < n\}$$

y para cada $j < n$

$$G_n^j = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in G_n(f \cup g) : x_j = g(x_{j+1})\}.$$

Mostraremos que $G_n(f \cup g)$ es conexo para todo $n > 1$. Como $G_2(f \cup g)$ es homeomorfo a la gráfica de $f \cup g$, entonces G_2 es conexo. Supongamos que

$$G_{n-1}(f \cup g)$$

es conexo.

De las definiciones anteriores podemos decir que

$$G_n(f \cup g) = G_n(f) \cup \bigcup_{j=1}^{n-1} G_n^j.$$

Como las gráficas de f y g no son disjuntas, existe $z \in X$ tal que $g(z) \in f(z)$ y para cada $j < n$, existe $\mathbf{x} \in G_n(f)$ tal que $\pi_{j+1}(\mathbf{x}) = z$. Además, $\mathbf{x} \in G_n(f) \cap G_n^j$.

Como $\lim_{\leftarrow} f$ es conexo, $G_n(f)$ es conexo por el Lema 2.3. Mostraremos ahora que G_n^j es conexo para cada $j < n$, que implicaría que $G_n(f \cup g)$ es conexo.

Para ver que G_n^1 es conexo, sea $h : G_{n-1}(f \cup g) \rightarrow G_n^1$ definida como

$$h(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = (g(x_1), x_1, x_2, \dots, x_{n-1}),$$

dado que h es una función biyectiva continua sobre un espacio métrico compacto a un espacio de Hausdorff tenemos que h es un homeomorfismo.

Por otra parte para cada $j < n - 1$, consideremos la siguiente función $\Psi_j : \prod_{i=1}^n X \rightarrow \prod_{i=1}^n X$ definida por

$$\Psi_j(\mathbf{x}) = \pi_{[1,j]}(\mathbf{x}) \oplus (g(\pi_{j+2}(\mathbf{x}))) \oplus \pi_{[j+2,n]}(\mathbf{x}).$$

Observemos que para cada j , Ψ_j es continua. Ahora mostraremos que $\Psi_j|_{G_n^j} : G_n^j \rightarrow G_n^{j+1}$ es sobreyectiva.

Sea $\mathbf{x} \in G_n^{j+1}$, es decir, suponemos $\mathbf{x} \in G_n$ y $\pi_j(\mathbf{x}) = g(\pi_{j+1}(\mathbf{x}))$. Ahora

$$\pi_{j+1}(\mathbf{x}) = g(\pi_{j+2}(\mathbf{x})) \quad \text{o} \quad \pi_{j+1}(\mathbf{x}) \in f(\pi_{j+2}(\mathbf{x})).$$

Si $\pi_{j+1}(\mathbf{x}) = g(\pi_{j+2}(\mathbf{x}))$, entonces $\mathbf{x} \in G_n^j$, y $\Psi_j(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. Por lo que $\Psi_j(\mathbf{x}) \in G_n^{j+1}$. Si $\pi_{j+1}(\mathbf{x}) \in f(\pi_{j+2}(\mathbf{x}))$, entonces

$$\pi_j(\mathbf{x}) \in g(f(\pi_{j+2}(\mathbf{x}))) = f(g(\pi_{j+2}(\mathbf{x}))).$$

Así que existe $z \in f(\pi_{j+2}(\mathbf{x}))$ tal que $\pi_j(\mathbf{x}) = g(z)$. Por lo tanto, $\mathbf{w} = \pi_{[1,j]}(\mathbf{x}) \oplus (z) \oplus \pi_{[j+2,n]}(\mathbf{x})$, es un elemento de G_n^j y $\Psi_j(\mathbf{w}) = \mathbf{x}$. Nuevamente, esto implica que $\mathbf{x} \in \Psi_j(G_n^j)$. Con lo anterior concluimos que $\Psi_j|_{G_n^j} : G_n^j \rightarrow G_n^{j+1}$ es sobreyectiva.

Se sigue que para cada G_n^j es conexo, por lo que G_n es conexo. De esta manera por el Lema 2.3, tenemos que $\lim_{\leftarrow} f \cup g$ es conexo. \square

La condición $f \circ g = g \circ f$ del teorema anterior puede ser un obstáculo para verificarla. Sin embargo Van Nall en [12] afirma que un caso fácil de comprobar cuando g es la constante con valor b y $f(b) = \{b\}$, veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.8. De acuerdo con el Ejemplo 2.2 tenemos que el límite inverso es conexo cuando la gráfica de la función de ligadura f^{-1} es como se muestra en la Figura 2.12. Si deseamos aplicar el Teorema 2.13, podemos elegir $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definida como $g(x) = b$ con $0 < b \leq 1$, y se cumple que $f^{-1}(b) = \{b\}$. Además,

$$(f^{-1} \circ g)(x) = f^{-1}(g(x)) = f^{-1}(b) = \{b\}$$

y si $x = 0$ entonces $f^{-1}(x) = [0, 1]$. Por otro lado

$$(g \circ f^{-1})(x) = g(f^{-1}(x)) = g(\{x\}) = \{x\}$$

y si $x = 0$, entonces $g(f^{-1}(x)) = g([0, 1]) = [0, 1]$. Por lo tanto, $f^{-1} \circ g = g \circ f^{-1}$. Como las gráficas de g y f^{-1} no son disjuntas, ver Figura 2.13, tenemos que $\lim f^{-1} \cup g$ es conexo.

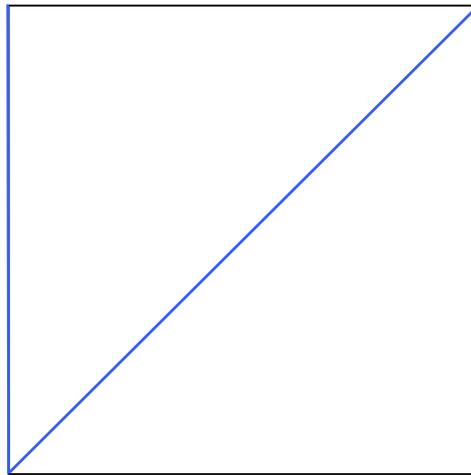


Figura 2.12: $\Gamma(f^{-1})$

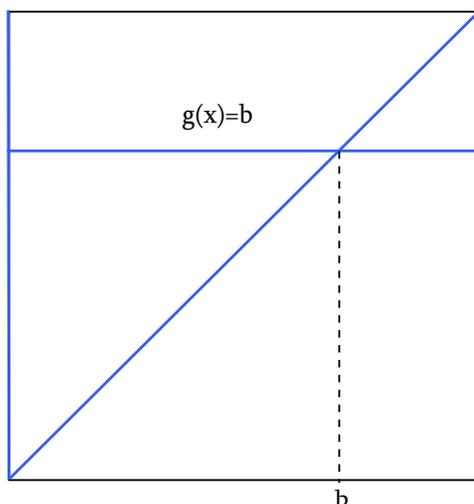


Figura 2.13: $\Gamma(f^{-1} \cup g)$

Teorema 2.14. Sean X un continuo de Hausdorff y $f : X \rightarrow 2^X$ una función usc sobreyectiva tal que $\varprojlim f$ es conexo. Si se satisface lo siguiente:

1. Sean $D \subseteq X$ cerrado y $g : D \rightarrow X$ continua tal que $\Gamma(f \cup g)$ es conexa.
2. Si x es tal que $x \in Fr(D)$ entonces $g(x) \in f(x)$.
3. si $g(x) = x$ para cada $x \in D$ o para algún $a \in X$, $g(x) = a$ para cada $x \in D$.

Entonces $\varprojlim f \cup g$ es conexo.

Demostración. Para cada $n > 1$, renombramos G_n de la siguiente manera:

$$G_n = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^n X : x_i \in f(x_{i+1}) \text{ para } 1 \leq i \leq n \right\}$$

y $G_n(f \cup g)$ como

$$\left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^n X : x_i \in f(x_{i+1}) \cup g(x_{i+1}) \text{ para } 1 \leq i \leq n \right\}.$$

Ahora, para $n > 1$ definimos $G_n^0 = G_n(f \cup g)$ y para cada $1 \leq j \leq n - 1$,

$$G_n^j = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in G_n(f \cup g) : x_i \in f(x_{i+1}) \text{ para } n - j < i < n\}.$$

Notemos que para cada $n > 1$, tenemos $G_n = G_n^{n-1} \subset G_n^{n-2} \subset \dots \subset G_n^0 = G_n(f \cup g)$, también que para cada $n > 1$, $G_n(f)$ es conexo, pues $\lim_{\leftarrow} f$ es conexo.

Por el Lema 2.3, debemos mostrar que $G_m^0 = G_m(f \cup g)$ es conexo para cada $m > 1$. Supongamos que G_m^0 no es conexo para cada $m > 0$. Sea n el número natural más pequeño tal que G_n^j no es conexo para algún j tal que $0 \leq j < n - 1$. Como $G_n^{n-1} = G_n(f)$ es conexo existe k tal que G_n^{k+1} es conexo y G_n^k no es conexo. Mostraremos que para cada $x \in G_n^k \setminus G_n^{k+1}$, existe un subconjunto conexo de G_n^k que contiene a x y un punto de G_n^{k+1} , esto va a contradir la conexidad de G_n^k . Notemos que $G_2^1 = G_2(f)$ supongamos es conexo y G_2^0 es homeomorfo a la gráfica de $f \cup g$, la cuál es conexo. Por lo tanto $n > 2$.

Supongamos que $g(x) = x$ para cada $x \in D$. Dado $\mathbf{x} \in G_n^k \setminus G_n^{k+1}$, se tiene que $\pi_{n-k-1}(\mathbf{x}) \in f \cup g(\pi_{n-k}(\mathbf{x}))$ y $\pi_{n-k-1}(\mathbf{x}) \in X \setminus f(\pi_{n-k}(\mathbf{x}))$. Entonces

$$\pi_{n-k-1}(\mathbf{x}) = g(\pi_{n-k}(\mathbf{x})) = \pi_{n-k}(\mathbf{x})$$

y $\pi_{n-k}(\mathbf{x}) \in D$. Sea $\mathbf{x}' = \pi_{[1, n-k-2]}(\mathbf{x}) \oplus \pi_{n-k, n}(\mathbf{x})$; es decir, \mathbf{x}' se obtiene moviendo la coordenada $(n - k - 1)$ -ésima de \mathbf{x} . Notemos que $\mathbf{x}' \in G_{n-1}^k$.

Sea $W = \{\mathbf{z} \in G_{n-1}^k : \pi_{n-k}(\mathbf{z}) \in D\}$ y sea K la componente de W tal que $\mathbf{x}' \in K$. Como las gráficas de f y g son cerradas y $G(f \cup g)$ es conexa existe $\mathbf{y} \in G_{n-1}^k$ que es conexo, tal que $\pi_{n-k}(\mathbf{y}) \in D$ y $\pi_{n-k}(\mathbf{y}) = g(\pi_{n-k}(\mathbf{y})) \in f(\pi_{n-k}(\mathbf{y}))$. Si $\mathbf{y} \in K$, entonces hacemos $\mathbf{y}' = \mathbf{y}$. Si $\mathbf{y} \notin K$ entonces K contiene un punto \mathbf{y}' en la frontera de W en G_{n-1}^k . Se sigue que $\pi_{n-k}(\mathbf{y}')$ está en la frontera de D en X y por lo tanto,

$$\pi_{n-k}(\mathbf{y}') = g(\pi_{n-k}(\mathbf{y}')) \in f(\pi_{n-k}(\mathbf{y}')).$$

Por lo que K es un continuo tal que $\pi_{n-k}(K) \subset D$, y K contiene \mathbf{x}' y \mathbf{y}' tal que

$$\pi_{n-k}(\mathbf{x}') = g(\pi_{n-k}(\mathbf{x}')) \in f(\pi_{n-k}(\mathbf{x}')).$$

Ahora sea $F : K \rightarrow G_n^k$, definida por $F(\mathbf{z}) = \pi_{[1, n-k]}(\mathbf{z}) \oplus \pi_{[n-k, n-1]}(\mathbf{z})$, es decir, inserta una nueva coordenada entre la coordenada $k-1$ y la coordenada k de \mathbf{z} igual a la coordenada k de \mathbf{z} . Esta función F es un homeomorfismo sobre K y $K^* = F(K)$ es un continuo en G_n^k , dado que $\mathbf{x} = F(\mathbf{x}')$, tenemos que G_n^k contiene a los puntos \mathbf{x} y $F(\mathbf{y}')$ que están en G_n^{k+1} . Como G_n^k es conexo, tenemos una contradicción. Se sigue que $G_n^0 = G_n(f \cup g)$ es conexo para cada n . Por lo tanto, $\varprojlim f \cup g$ es conexo en caso que $g(x) = x$, para cada $x \in D$.

Ahora supongamos que existe $a \in X$ tal que $g(x) = a$ para cada $x \in D$. Sea $\mathbf{x} \in G_n^k \setminus G_n^{k+1}$, esto implica que $\pi_{n-k-1}(\mathbf{x}) \in f \cup g(\pi_{n-k}(\mathbf{x}))$ y $\pi_{n-k-1}(\mathbf{x}) \in X \setminus f(\pi_{n-k}(\mathbf{x}))$. Se sigue que $\pi_{n-k-1}(\mathbf{x}) = a = g(\pi_{n-k}(\mathbf{x}))$ y $\pi_{n-k}(\mathbf{x}) \in D$. Sea $\mathbf{x}' = \pi_{[n-k, n]}(\mathbf{x})$, notemos que $\mathbf{x}' \in G_{n-k+1} = G_{n-k+1}(f)$.

Sea $W = \{\mathbf{z} \in G_{n-k+1}^k : \pi_1(\mathbf{z}) \in D\}$ y K una componente de W tal que $\mathbf{x}' \in K$. Como las gráficas de f y g son cerradas y $G(f \cup g)$ es conexo existe un punto \mathbf{y} en el conjunto conexo G_{n-k+1}^k tal que $\pi_1(\mathbf{y}) \in D$ y $a = g(\pi_1(\mathbf{y})) \in f(\pi_1(\mathbf{y}))$. Si $\mathbf{y} \in K$, sea $\mathbf{y} = \mathbf{y}'$. Si $\mathbf{y} \notin K$, entonces K contiene un punto \mathbf{y}' en la frontera de W en G_{n-k+1} . Se sigue que $\pi_1(\mathbf{y})$ está en la frontera de D , y así $a = g(\pi_1(\mathbf{y}')) \in f(\pi_1(\mathbf{y}'))$. Por lo tanto, K es un continuo tal que $\pi_1(K) \subset D$, contiene a los puntos \mathbf{x}' , \mathbf{y}' y satisfacen que $a = g(\pi_1(\mathbf{y}')) \in f(\pi_1(\mathbf{y}'))$. Notemos que la primera coordenada de cada elemento de K está en D . Si unimos $\pi_{[1, n-k-1]}(\mathbf{x})$ con cualquier punto de K , el resultado da un punto en G_n^k . Es decir, sea $F : K \rightarrow G_n^k$, definida por $F(\mathbf{z}) = \pi_{[1, n-k-1]}(\mathbf{z}) \oplus \mathbf{z}$. Esta función es un homeomorfismo sobre K , y $K^* = F(K)$ es un continuo en G_n^k , dado que $\mathbf{x} = F(\mathbf{x}')$, tenemos que $\mathbf{x} \in K^*$ y $F(\mathbf{y}') \in K^*$, que está en G_n^{k+1} .

Dado que G_n^k es conexo, se tiene una contradicción. Se sigue que $G_n^0 = G_n(f \cup g)$ es conexo para cada n . Por lo tanto, $\varprojlim f \cup g$ es conexo en caso que $g(x) = a$, para cada $x \in D$. \square

De acuerdo con el Teorema 2.14, si $\varprojlim f$ es conexo y $g : [c, d] \rightarrow X$ es una función constante $g(x) = a$, las condiciones $g(c) \in f(c)$ y $g(d) \in f(d)$ implican que $a \in f(c)$ y $a \in f(d)$, o bien $c \in f^{-1}(a)$ y $d \in f^{-1}(a)$. Por tanto $\{c, d\} \subset f^{-1}(a)$. Lo anterior lo podemos escribir así si $\varprojlim f$ es conexo y agregamos a la gráfica de f una línea horizontal de la forma $\{(x, a) : c \leq x \leq d\}$, donde $\{c, d\} \subset f^{-1}(a) \cup \{0, 1\}$, entonces el límite inverso con esta nueva función de

ligadura, es conexo. Ahora por el Teorema 2.12 se tiene que $\varprojlim f^{-1}$ es conexo. Aplicando Teorema 2.14, $\varprojlim f^{-1} \cup g$ es conexo, y nuevamente usando el Teorema 2.12, obtenemos que

$$\varprojlim (f^{-1} \cup g)^{-1} = \varprojlim (f^{-1})^{-1} \cup (g)^{-1} = \varprojlim f \cup (g)^{-1},$$

es conexo. Por tanto agregando la línea vertical a f , $\{(a, x) : c \leq x \leq d\}$, donde $\{c, d\} \subset f(a) \cup \{0, 1\}$ el límite inverso con esta nueva función de ligadura, es conexo.

Cuando se aplican los resultados de los Teoremas 2.12 y 2.14, para el caso donde $f : X \rightarrow 2^X$ y $\varprojlim f$ es conexo, podemos ver que si agregamos a la gráfica de f una línea horizontal de la forma $\{(x, a) : c \leq x \leq d\}$, donde $\{c, d\} \subset f^{-1}(a) \cup \{0, 1\}$ o si agregamos a la gráfica de f una línea vertical, de la forma $\{(a, x) : c \leq x \leq d\}$, donde $\{c, d\} \subset f(a) \cup \{0, 1\}$, entonces el límite inverso con esta nueva función de ligadura, es conexo.

Definición 2.4. Sean $f : X \rightarrow 2^X$ una función usc y $g : X \rightarrow X$ una función continua. La función $F = g^{-1}fg = g^{-1} \circ f \circ g$ composición de g^{-1} , f y g esta definida como $y \in g^{-1}fg(x)$ si y solo si $g(y) \in f(g(x))$.

Definición 2.5. Si $h : X \rightarrow 2^X$ es semiconjugada de una función usc $f : X \rightarrow 2^X$, entonces es equivalente a lo siguiente, si existe una función continua $g : X \rightarrow X$ tal que $gh = fg$.

Proposición 2.1. Si $h : X \rightarrow 2^X$ es semiconjugada de una función usc $f : X \rightarrow 2^X$ entonces es equivalente a que exista una función continua sobreyectiva $g : X \rightarrow X$ tal que $h = g^{-1}fg$.

Demostración. Supongamos que $h : X \rightarrow 2^X$ es semiconjugada de una función usc $f : X \rightarrow 2^X$, entonces existe una función continua $g : X \rightarrow X$ tal que $gh = fg$.

Sea $x \in X$ demostraremos que $h(x) = (g^{-1}fg)(x)$. Dada $y \in h(x)$, se tiene $g(y) \in g(h(x)) = f(g(x))$. Así $g(y) \in f(g(x))$. Por lo tanto $y \in (g^{-1}fg)(x)$.

Ahora sea $y \in (g^{-1}fg)(x)$. Supongamos que $y \notin h(x)$, entonces $g(y) \notin g(h(x)) = f(g(x))$, así $g(y) \notin f(g(x))$, es decir, $y \notin (g^{-1}fg)(x)$. Por lo tanto $y \in h(x)$.

Supongamos que $h : X \rightarrow 2^X$ y $f : X \rightarrow 2^X$ son funciones conjunto-
valuadas y que existe $g : X \rightarrow X$ continua y sobreyectiva tal que $h = g^{-1}fg$. Sea
 $x \in X$, así $h(x) = g^{-1}fg(x)$, $g(h(x)) = g(g^{-1}fg(x))$, como g es sobreyectiva
entonces $g(g^{-1}fg(x)) = (gg^{-1})(fg(x)) = fg(x)$. Por lo tanto $g(h(x)) = fg(x)$.
□

Teorema 2.15. Sean X es un continuo de Hausdorff, $f : X \rightarrow 2^X$ es una función
usc sobreyectiva y $g : X \rightarrow X$ una función continua y sobreyectiva. Si $\varprojlim g^{-1}fg$
es conexo, entonces $\varprojlim f$ es conexo.

Demostración. Para cada n , sea

$$G_n = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^n X : x_i \in f(x_{i+1}) \text{ para } i \leq n-1 \right\}$$

y para cada n , sea

$$G'_n = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^n X : x_i \in g^{-1}fg(x_{i+1}) \text{ para } i \leq n-1 \right\}.$$

Mostraremos que la función $\varphi : G'_n \rightarrow G_n$, definida por

$$\varphi((x_1, x_2, \dots, x_n)) = (g(x_1), g(x_2), \dots, g(x_n))$$

está bien definida. Sea $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in G'_n$, como $x_i \in g^{-1}fg(x_{i+1})$ para $i \leq$
 $n-1$, tenemos $g(x_i) \in (fg)(x_{i+1})$ para $i \leq n-1$. Por lo tanto $(g(x_1), g(x_2), \dots, g(x_n)) \in$
 G_n .

Sean $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in G_n$ y $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^n X$ tales que $x_i \in g^{-1}(y_i)$
para cada $i \leq n$, de lo anterior $y_i \in f(y_{i+1}) = f(g(x_{i+1}))$ para $i \leq n-1$, por lo
que para cada $i \leq n-1$,

$$x_i \in g^{-1}(y_i) \subset g^{-1}f(g(x_{i+1})).$$

Por lo tanto $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in G'_n$. Concluimos así que la función continua φ está
bien definida y además es sobreyectiva.

Puesto que $\lim_{\leftarrow} g^{-1}fg$ es conexo, G'_n es conexo para cada $n \in \mathbb{N}$, así G_n es conexo para cada $n \in \mathbb{N}$, de aquí $\lim_{\leftarrow} f$ es conexo. \square

El Teorema anterior es de mucha utilidad para construir nuevas funciones donde el límite inverso es desconexo, si $f : X \rightarrow 2^X$ es una función conjunto-valuada tal que $\lim_{\leftarrow} f$ no es conexo, entonces para cualquier función $g : X \rightarrow X$, $\lim_{\leftarrow} g^{-1}fg$ no es conexo.

El Teorema 2.12, muestra un resultado para cuando se considera una sola función de ligadura. La pregunta obligada es que si es posible obtener un resultado similar cuando se considera una sucesión de funciones de ligadura. T. W. Ingram y Marsh muestran en [10] un ejemplo en donde esto se cumple cuando se tiene mas de una función de ligadura.

Ejemplo 2.9. Sean $f_1 : [0, 1] \rightarrow 2^{[0,1]}$, dada por $f_1(t) = \{t, (t+3)/4\}$ y $f_2(t) = t$ para $0 \leq t < 1/4$, $f_2(t) = \{t, (4t-1)/2\}$ para $1/4 \leq t \leq 3/4$, y $f_2(t) = t$ para $3/4 \leq t \leq 1$, ver en las Figuras 2.14 y 2.15. Para $n > 2$, sea $f_n(t) = t$ para cada $t \in [0, 1]$. Sea \mathbf{g} una sucesión tal que $g_n = f_n^{-1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces, $\lim_{\leftarrow} \mathbf{f}$ es conexo y $\lim_{\leftarrow} \mathbf{g}$ no lo es.

Demostración. Sean

$$\Delta = \{x \in [0, 1]^\infty : x_j = x_1 \text{ para } j = 2, 3, \dots\},$$

$$G'(f_1, f_2) = \{(x_1, x_2, x_3) \in [0, 1]^3 : x_1 \in f_1(x_2) \text{ y } x_2 \in f_2(x_3)\},$$

$$A_1 = \{(x, x, x) \in [0, 1]^3 : x \in [0, 1]\},$$

$$A_2 = \{(x, x, (2x+1)/4) : x \in [0, 1]\},$$

$$A_3 = \{(t, 4t-3, 4t-3) : t \in [3/4, 1]\},$$

y

$$A_4 = \{(t, 4t-3, (8t-15)/4) : t \in [3/4, 1]\}.$$

Notemos que $G'(f_1, f_2)$ es unión de los cuatro arcos A_1, A_2, A_3 y A_4 . Además $(1/2, 1/2, 1/2) \in A_1 \cap A_2$, $(1, 1, 3/4) \in A_2 \cap A_4$ y $(1, 1, 1) \in A_1 \cap A_3$. Se sigue que $G'(f_1, f_2)$ es conexo. Por el Teorema 2.3, $\lim_{\leftarrow} \mathbf{f}$ es conexo, porque $G_1 = G_1(f_1^{-1}) \times \Delta$ y $G_n = G'(f_1, f_2) \times \Delta$ para $n \geq 2$ son conexos.

Por otro lado $G(g_{13})$ no es conexo porque el punto $(1, 0)$ es punto aislado de $G(g_{13})$, así por el Teorema 3.1, $\lim_{\leftarrow} g$ no es conexo. \square

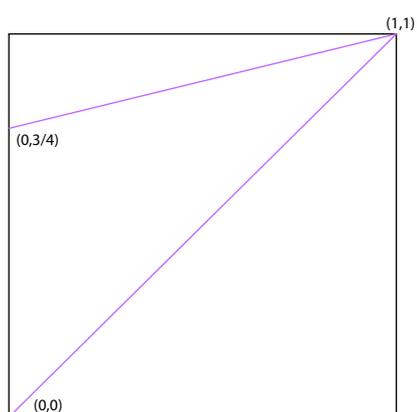


Figura 2.14: $\Gamma(f_1)$

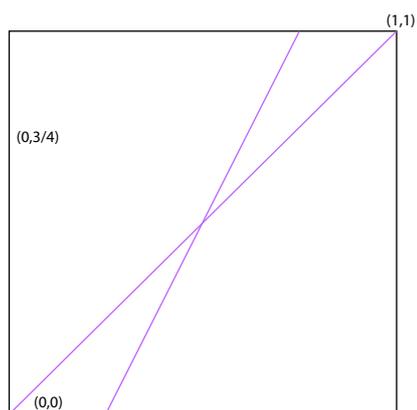


Figura 2.15: $\Gamma(f_2)$

2.2. Productos Ingram-Mahavier

En [4] se introducen los productos de Ingram-Mahavier para obtener resultados de conexidad de límites inversos generalizados. A continuación lo describiremos y veremos resultados relacionados a este concepto.

2.2.1. Producto de Ingram-Mahavier

Definición 2.6. Supongamos que X , Y y Z son espacios topológicos, y $A \subset X \times Y$, $B \subset Y \times Z$, entonces definimos el producto de Ingram-Mahavier $A \star B$ como sigue:

$$A \star B = \{(x, y, z) \in X \times Y \times Z : (x, y) \in A \text{ y } (y, z) \in B\}.$$

Lo abreviamos y llamamos $A \star B$ como *producto IM*. Los productos *IM* tienen propiedades topológicas interesantes que enlistaremos en la Sección 2.2.2. Si $\mathbf{x}_1 = (x, y) \in X \times Y$ y $\mathbf{x}_2 = (y, z) \in Y \times Z$ entonces escribiremos $\mathbf{x}_1 \star \mathbf{x}_2$ en lugar de $\{(x, y)\} \star \{(y, z)\}$. Por supuesto que $\mathbf{x}_1 \star \mathbf{x}_2 = \{(x, y, z)\}$.

El espacio intermedio Y en la definición anterior juega un papel muy importante.

Notación. $\pi_Y^{X \times Y}$ denota la función proyección de $X \times Y$ sobre Y y $\pi_Y^{Y \times Z}$ denota la función proyección de $Y \times Z$ sobre Y . Y $\pi_Y^{X \times Y \times Z}$ denota la función proyección de $X \times Y \times Z$ sobre Y . Usaremos π_Y para denotar estas funciones proyección, de acuerdo al contexto podremos diferenciarlas, si no hay confusión.

Definición 2.7. Dado $G \subset X \times Y$, $\pi_Y^G : G \rightarrow Y$ esta definida por $\pi_Y^G((x, y)) = y$, para $(x, y) \in G$. Si $H \subset Y \times Z$ definimos π_Y^H de manera similar.

Proposición 2.2. Supongamos que X , Y y Z son espacios topológicos, y $A \subset X \times Y$, $B \subset Y \times Z$. Entonces $A \star B = \emptyset$ si y solo si $\pi_Y^{X \times Y}(A) \cap \pi_Y^{Y \times Z}(B) = \emptyset$.

Demostración. $y \in \pi_Y^{X \times Y}(A) \cap \pi_Y^{Y \times Z}(B)$, si y solo si existen $x \in X$ y $z \in Z$ tales que $\pi_Y^{X \times Y}((x, y)) = y$ y $\pi_Y^{Y \times Z}((y, z)) = y$ si y solo si $(x, y) \in A$ y $(y, z) \in B$ si y solo si $(x, y, z) \in A \star B$. \square

Ahora supongamos que para $i > 0$, I_i es el intervalo $[0, 1]$ y $f_i : I_{i+1} \rightarrow 2^{I_i}$ es usc sobreyectiva cuya gráfica $\Gamma(f_i)$ es conexa.

Una pregunta natural es la siguiente ¿qué relación hay entre los límites inversos generalizados y los productos IM? Después de presentar algunos hechos básicos relacionados a la pregunta anterior se dará respuesta a esta pregunta.

2.2.2. Propiedades de los productos IM

Un básico en $X \times Y \times Z$, $X \times Y$ o $Y \times Z$ es un conjunto de la forma $A_X \times A_Y \times A_Z$, $A_X \times A_Y$ o $A_Y \times A_Z$ respectivamente, para algunos $A_X \subset X$, $A_Y \subset Y$ y $A_Z \subset Z$.

En las proposiciones siguientes X , Y , Z y W serán espacios topológicos.

Proposición 2.3. *Si $G \subset X \times Y$ y $H \subset Y \times Z$. Entonces $G \star H = (G \times Z) \cap (X \times H)$.*

Demostración. Sea $(x, y, z) \in G \star H$, entonces $(x, y) \in G$ y $(y, z) \in H$ y como $G \subset X \times Y$ y $H \subset Y \times Z$ tenemos que $x \in X$, $y \in Y$ y $z \in Z$, así $(x, y, z) \in G \times Z$ y $(x, y, z) \in X \times H$. Por lo tanto $(x, y, z) \in (G \times Z) \cap (X \times H)$.

Ahora, si $(x, y, z) \in (G \times Z) \cap (X \times H)$, entonces $(x, y, z) \in G \times Z$ y $(x, y, z) \in X \times H$, de aquí que $(x, y) \in G$, y $(y, z) \in H$. Por lo tanto $(x, y, z) \in G \star H$. \square

Proposición 2.4. *Si $G \subset X \times Y$ y $H \subset Y \times Z$. Entonces $\pi_Y(G \star H) = \pi_Y(G) \cap \pi_Y(H)$*

Demostración. Sea $y \in \pi_Y(G \star H)$, entonces existe $(x, y, z) \in G \star H$ tal que $\pi_Y((x, y, z)) = y$ y $(x, y) \in G$, $(y, z) \in H$. De aquí que $\pi_Y((x, y)) = y$ y $\pi_Y((y, z)) = y$. Por lo tanto $y \in \pi_Y(G) \cap \pi_Y(H)$.

Ahora, si $y \in \pi_Y(G) \cap \pi_Y(H)$, existen $(x, y) \in G$ y $(y, z) \in H$, tales que $\pi_Y((x, y)) = y$ y $\pi_Y((y, z)) = y$. Por lo tanto $(x, y, z) \in G \star H$ y $\pi_Y((x, y, z)) = y$, con esto $y \in \pi_Y(G \star H)$. \square

Proposición 2.5. *Si $G, J \subset X \times Y$ y $H, K \subset Y \times Z$. Entonces*

$$(G \cap J) \star (H \cap K) = (G \star H) \cap (J \star K) = (G \star K) \cap (J \star H).$$

Demostración. Notese que $(x, y, z) \in (G \cap J) \star (H \cap K)$, si y sólo si $(x, y) \in G \cap J$ y $(y, z) \in H \cap K$, o bien $(x, y) \in G$, $(x, y) \in J$, $(y, z) \in H$ y $(y, z) \in K$. De esta manera, por un lado, tenemos $(x, y) \in G$ y $(y, z) \in H$ si y solo si $(x, y, z) \in G \star H$

por otro lado $(x, y) \in J$ y $(y, z) \in K$ si y sólo si $(x, y, z) \in J \star K$ si y sólo si $(x, y, z) \in (G \star H) \cap (J \star K)$.

De otra forma también podemos decir que $(x, y) \in G$ y $(y, z) \in K$ si y sólo si $(x, y, z) \in G \star K$, y $(x, y) \in J$ y $(y, z) \in H$ si y sólo si $(x, y, z) \in J \star H$. Por lo tanto $(x, y, z) \in (G \star K) \cap (J \star H)$. \square

Proposición 2.6. Si $G, J \subset X \times Y$ y $H, K \subset Y \times Z$. Entonces

$$(G \cup J) \star (H \cup K) = (G \star H) \cup (J \star K) \cup (G \star K) \cup (J \star H).$$

Demostración. Sea

$$(x, y, z) \in (G \cup J) \star (H \cup K),$$

entonces $(x, y) \in G \cup J$ y $(y, z) \in H \cup K$. De aquí obtenemos los siguientes casos:

Caso I Si $(x, y) \in G$ y $(y, z) \in H$, entonces $(x, y, z) \in G \star H$. Así,

$$(x, y, z) \in (G \star H) \cup (J \star K) \cup (G \star K) \cup (J \star H).$$

Caso II Si $(x, y) \in J$ y $(y, z) \in K$, entonces $(x, y, z) \in J \star K$. Así,

$$(x, y, z) \in (G \star H) \cup (J \star K) \cup (G \star K) \cup (J \star H).$$

Caso III Si $(x, y) \in G$ y $(y, z) \in K$, entonces $(x, y, z) \in G \star K$. Así,

$$(x, y, z) \in (G \star H) \cup (J \star K) \cup (G \star K) \cup (J \star H).$$

Caso IV Si $(x, y) \in J$ y $(y, z) \in H$, si y sólo si $(x, y, z) \in J \star H$. Así,

$$(x, y, z) \in (G \star H) \cup (J \star K) \cup (G \star K) \cup (J \star H).$$

Por lo tanto

$$(G \cup J) \star (H \cup K) \subseteq (G \star H) \cup (J \star K) \cup (G \star K) \cup (J \star H).$$

Ahora sea $(x, y, z) \in (G \star H) \cup (J \star K) \cup (G \star K) \cup (J \star H)$. Obtenemos los siguientes casos:

Caso I Si $(x, y, z) \in G \star H$, entonces $(x, y) \in G$ y $(y, z) \in H$. De aquí que $(x, y) \in G \cup J$ y $(y, z) \in H \cup K$. Así, $(x, y, z) \in (G \cup J) \star (H \cup K)$.

Caso II Si $(x, y, z) \in J \star K$, entonces $(x, y) \in J$ y $(y, z) \in K$. De aquí que $(x, y) \in J \cup G$ y $(y, z) \in K \cup H$. Así, $(x, y, z) \in (J \cup G) \star (K \cup H)$.

Caso III Si $(x, y, z) \in G \star K$, entonces $(x, y) \in G$ y $(y, z) \in K$. De aquí que $(x, y) \in G \cup J$ y $(y, z) \in K \cup H$. Así, $(x, y, z) \in (G \cup J) \star (K \cup H)$.

Caso IV Si $(x, y, z) \in J \star H$, entonces $(x, y) \in J$ y $(y, z) \in H$. De aquí que $(x, y) \in J \cup G$ y $(y, z) \in H \cup K$. Así, $(x, y, z) \in (J \cup G) \star (H \cup K)$.

Por lo tanto $(G \star H) \cup (J \star K) \cup (G \star K) \cup (J \star H) \subseteq (G \cup J) \star (H \cup K)$. \square

Proposición 2.7. Supongamos que $G, J \subset X \times Y$ y $H, K \subset Y \times Z$. Entonces

$$(G \cup J) \star (H \cap K) = [(G \star H) \cap (G \star K)] \cup [(J \star K) \cap (J \star H)]$$

y

$$(G \cap J) \star (H \cup K) = [(G \star H) \cap (J \star H)] \cup [(G \star K) \cap (J \star K)].$$

Demostración. Primero demostremos que

$$(G \cup J) \star (H \cap K) = [(G \star H) \cap (G \star K)] \cup [(J \star K) \cap (J \star H)]$$

$(x, y, z) \in (G \cup J) \star (H \cap K)$, si y sólo si $(x, y) \in G \cup J$ y $(y, z) \in H \cap K$. Así tenemos los casos siguientes:

Caso I $(x, y) \in G$, $(y, z) \in H$ y $(y, z) \in K$, si y sólo si $(x, y, z) \in G \star H$ y $(x, y, z) \in G \star K$, si y sólo si $(x, y, z) \in (G \star H) \cap (G \star K)$, si y sólo si $(x, y, z) \in [(G \star H) \cap (G \star K)] \cup [(J \star K) \cap (J \star H)]$.

Caso II $(x, y) \in J$, $(y, z) \in H$ y $(y, z) \in K$, si y sólo si $(x, y, z) \in J \star H$ y $(x, y, z) \in J \star K$, si y sólo si $(x, y, z) \in (J \star H) \cap (J \star K)$, si y sólo si $(x, y, z) \in [(G \star H) \cap (G \star K)] \cup [(J \star K) \cap (J \star H)]$.

Por lo tanto,

$$(G \cup J) \star (H \cap K) = [(G \star H) \cap (G \star K)] \cup [(J \star K) \cap (J \star H)].$$

De manera similar se demuestra que

$$(G \cap J) \star (H \cup K) = [(G \star H) \cap (J \star H)] \cup [(G \star K) \cap (J \star K)].$$

□

Proposición 2.8. Si $G \subset X \times Y$, $H \subset Y \times Z$ y $L \subset Z \times W$. Entonces $(G \star H) \star L = G \star (H \star L)$, en tal caso simplemente escribiremos $G \star H \star L$.

Demostración. $(x, y, z, w) \in (G \star H) \star L$ si y sólo si $(x, y, z) \in G \star H$ y $(z, w) \in L$, si y sólo si $(x, y) \in G$, $(y, z) \in H$ y $(z, w) \in L$, si y sólo si $(y, z, w) \in H \star L$ y como $(x, y) \in G$, $(x, y, z, w) \in G \star (H \star L)$.

□

Proposición 2.9. Supongamos que $G = g_1 \times g_2$ es un subconjunto básico abierto de $X \times Y$ y $H = h_2 \times h_3$ es un subconjunto básico abierto de $Y \times Z$. Entonces $G \star H = g_1 \times (g_2 \cap h_2) \times h_3$ es un subconjunto básico abierto de $X \times Y \times Z$, que es vacío si $g_2 \cap h_2 = \emptyset$.

Demostración. Como G y H son abiertos básicos de $X \times Y$ y $Y \times Z$ respectivamente g_1 es abierto de X , g_2 y h_2 abiertos de Y y h_3 abierto de Z , por lo que $g_2 \cap h_2$ es abierto de Y . Por lo tanto, $g_1 \times (g_2 \cap h_2) \times h_3$ es un subconjunto básico abierto de $X \times Y \times Z$.

□

Proposición 2.10. Si G es un abierto de $X \times Y$ y H es un abierto de $Y \times Z$. Entonces $G \star H$ es un abierto de $X \times Y \times Z$, que puede ser vacío.

Demostración. Supongamos que $G \star H \neq \emptyset$, sea $(x, y, z) \in G \star H$, entonces $(x, y) \in G$ y $(y, z) \in H$, ahora como G y H son abiertos existen U abierto en X , V, V' abiertos en Y y W abierto en Z , tales que $(x, y) \in U \times V \subset G$, $(y, z) \in V' \times W \subset H$. Así, $U = U \times (V \cap V') \times W$, es un básico de $X \times Y \times Z$ tal que $(x, y, z) \in U \subset G \star H$.

□

Proposición 2.11. Si $G \subset X \times Y$ y $H \subset Y \times Z$. Entonces

$$(X \times Y \times Z) \setminus (G \star H) = \\ [((X \times Y) \setminus G) \times Z] \cup [X \times ((Y \times Z) \setminus H)] \cup [X \times (Y \setminus (\pi_Y(G) \cap \pi_Y(H))) \times Z].$$

Demostración. $(x, y, z) \in X \times Y \times Z \setminus (G \star H)$, si y sólo si $(x, y, z) \notin (G \star H)$, y tenemos los siguientes casos:

Caso I $(x, y) \in G$ y $(y, z) \notin H$, si y sólo si $(x, y, z) \in X \times ((Y \times Z) \setminus H)$.

Caso II $(x, y) \notin G$ y $(y, z) \in H$, si y sólo si $(x, y, z) \in ((X \times Y) \setminus G) \times Z$.

Caso III $(x, y) \notin G$ y $(y, z) \notin H$, si y sólo si $y \notin \pi_Y(G)$ y $y \notin \pi_Y(H)$ o bien $y \notin \pi_Y(G) \cap \pi_Y(H)$, si y sólo si $(x, y, z) \in X \times (Y \setminus (\pi_Y(G) \cap \pi_Y(H))) \times Z$.

Con estos tres casos tenemos que

$$(x, y, z) \in \\ [((X \times Y) \setminus G) \times Z] \cup [X \times ((Y \times Z) \setminus H)] \cup [X \times (Y \setminus (\pi_Y(G) \cap \pi_Y(H))) \times Z].$$

Ahora, si $(x, y, z) \in [((X \times Y) \setminus G) \times Z] \cup [X \times ((Y \times Z) \setminus H)] \cup [X \times (Y \setminus (\pi_Y(G) \cap \pi_Y(H))) \times Z]$ se cumplen cualquiera de los casos anteriores. \square

Proposición 2.12. Si X, Y y Z son espacios compactos de Hausdorff, G un subconjunto cerrado de $X \times Y$ y H un subconjunto cerrado de $Y \times Z$. Entonces $G \star H$ es un subconjunto cerrado de $X \times Y \times Z$, que puede ser vacío.

Demostración. Como G y H son cerrados, tenemos $(X \times Y) \setminus G$ es abierto en $X \times Y$, así $((X \times Y) \setminus G) \times Z$ es abierto en $X \times Y \times Z$, $(Y \times Z) \setminus H$ es abierto en $Y \times Z$, así $X \times ((Y \times Z) \setminus H)$ es abierto en $X \times Y \times Z$. También $Y \setminus (\pi_Y(G) \cap \pi_Y(H))$ es abierto en Y , y $X \times (Y \setminus (\pi_Y(G) \cap \pi_Y(H))) \times Z$ es abierto en $X \times Y \times Z$. Por lo que, por la Proposición 3.12, $G \star H$ es un subconjunto cerrado de $X \times Y \times Z$. \square

Proposición 2.13. Si X, Y y Z son espacios compactos de Hausdorff, U es abierto en el conjunto cerrado $G \subset X \times Y$ y V es abierto en el conjunto cerrado $H \subset Y \times Z$. Entonces $U \star V$ es abierto relativo con respecto a $G \star H$.

Demostración. Existen un abierto U' de $X \times Y$ tal que $U = U' \cap G$ y V' un abierto de $Y \times Z$ tal que $V = V' \cap H$. Ahora,

$$U \star V = (U' \cap G) \star (V' \cap H) = (U' \star V') \cap (G \star H).$$

Como $U' \star V'$ es abierto en $X \times Y \times Z$, $G \star H$ es cerrado en $X \times Y \times Z$, $(U' \star V') \cap (G \star H) = U \star V$ es abierto relativo en $G \star H$. \square

Proposición 2.14. Si X, Y y Z son espacios compactos de Hausdorff, G y H son cerrados en $X \times Y$ y $Y \times Z$ respectivamente y K un subconjunto cerrado de Y . Entonces

$$(G \cap \pi_Y^{-1}(K)) \star (H \cap \pi_Y^{-1}(K)) = ((\pi_Y^G)^{-1}(K)) \star ((\pi_Y^H)^{-1}(K)).$$

Demostración. Sea $(x, y, z) \in (G \cap \pi_Y^{-1}(K)) \star (H \cap \pi_Y^{-1}(K))$, entonces $(x, y) \in ((\pi_Y^G)^{-1}(K)) \cap G$ y $(y, z) \in ((\pi_Y^H)^{-1}(K)) \cap H$, de aquí $(x, y) \in G$, $(y, z) \in H$ y $y \in K$. Así $(x, y, z) \in ((\pi_Y^G)^{-1}(K)) \star ((\pi_Y^H)^{-1}(K))$. Por lo tanto,

$$(G \cap \pi_Y^{-1}(K)) \star (H \cap \pi_Y^{-1}(K)) \subset ((\pi_Y^G)^{-1}(K)) \star ((\pi_Y^H)^{-1}(K))$$

Ahora sea $(x, y, z) \in ((\pi_Y^G)^{-1}(K)) \star ((\pi_Y^H)^{-1}(K))$, entonces $(x, y) \in ((\pi_Y^G)^{-1}(K))$, $(y, z) \in ((\pi_Y^H)^{-1}(K))$, $y \in K$, $(x, y) \in G$ y $(y, z) \in H$, por lo que $(x, y, z) \in (G \cap \pi_Y^{-1}(K)) \star (H \cap \pi_Y^{-1}(K))$. Por lo tanto,

$$((\pi_Y^G)^{-1}(K)) \star ((\pi_Y^H)^{-1}(K)) \subset (G \cap \pi_Y^{-1}(K)) \star (H \cap \pi_Y^{-1}(K)).$$

\square

Proposición 2.15. Supongamos que $S \subset Y$. Entonces

$$(\pi_Y^{X \times Y \times Z})^{-1}(S) = (\pi_Y^{X \times Y})^{-1}(S) \star (\pi_Y^{Y \times Z})^{-1}(S).$$

Demostración. Sea $(x, y, z) \in (\pi_Y^{X \times Y \times Z})^{-1}(S)$, entonces $\pi_Y^{X \times Y \times Z}((x, y, z)) = y \in S$, $(x, y) \in X \times Y$ y $(y, z) \in Y \times Z$, con esto tenemos que $\pi_Y^{X \times Y}((x, y)) = y$ y $\pi_Y^{Y \times Z}((y, z)) = y$, de aquí

$$(x, y) \in (\pi_Y^{X \times Y})^{-1}(S) \text{ y } (y, z) \in (\pi_Y^{Y \times Z})^{-1}(S).$$

Por lo tanto, $(x, y, z) \in (\pi_Y^{X \times Y})^{-1}(S) \star (\pi_Y^{Y \times Z})^{-1}(S)$.

Ahora, sea $(x, y, z) \in (\pi_Y^{X \times Y})^{-1}(S) \star (\pi_Y^{Y \times Z})^{-1}(S)$, entonces

$$(x, y) \in (\pi_Y^{X \times Y})^{-1}(S)$$

y

$$(y, z) \in (\pi_Y^{Y \times Z})^{-1}(S)$$

y $y \in S$. Esto implica que $(x, y, z) \in X \times Y \times Z$ y $\pi_Y^{X \times Y \times Z}((x, y, z)) = y \in S$.

Por lo tanto,

$$(x, y, z) \in (\pi_Y^{X \times Y \times Z})^{-1}(S).$$

□

Proposición 2.16. Si X, Y y Z son espacios métricos y compactos, y $G \subset X \times Y$, $H \subset Y \times Z$ son subconjuntos cerrados y d_1, d_2 son métricas sobre $X \times Y$ y $Y \times Z$ respectivamente. Si $\varepsilon > 0$, sean

$$N_\varepsilon(G) = \{\mathbf{x} \in X \times Y : \text{existe } \mathbf{z} \in G \text{ tal que } d_1(\mathbf{x}, \mathbf{z}) < \varepsilon\}$$

y

$$N_\varepsilon(H) = \{\mathbf{x} \in Y \times Z : \text{existe } \mathbf{z} \in H \text{ tal que } d_2(\mathbf{x}, \mathbf{z}) < \varepsilon\}.$$

Entonces

$$\bigcap_{\varepsilon > 0} (N_\varepsilon(G) \star N_\varepsilon(H)) = G \star H$$

Demostración. Sea $\mathbf{x} \in \bigcap_{\varepsilon > 0} (N_\varepsilon(G) \star N_\varepsilon(H))$. Si $\mathbf{x}_G = \pi_{X \times Y}(\mathbf{x})$ y $\mathbf{x}_H = \pi_{Y \times Z}(\mathbf{x})$, entonces $\mathbf{x}_G \star \mathbf{x}_H = \mathbf{x}$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$, $\mathbf{x}_G \in N_\varepsilon(G)$ y $\mathbf{x}_H \in N_\varepsilon(H)$. Así $\mathbf{x}_G \in G$, $\mathbf{x}_H \in H$ y $\mathbf{x} \in G \star H$. Por lo tanto

$$\bigcap_{\varepsilon > 0} (N_\varepsilon(G) \star N_\varepsilon(H)) \subset G \star H$$

Si $\mathbf{x} \in G \star H$, entonces $\mathbf{x}_G \in G$ y $\mathbf{x}_H \in H$. Sea $\varepsilon > 0$, entonces $d_1(\mathbf{x}_G, \mathbf{x}_G) = 0 < \varepsilon$ y $d_2(\mathbf{x}_H, \mathbf{x}_H) = 0 < \varepsilon$, con esto tenemos que $\mathbf{x}_G \in N_\varepsilon(G)$ y $\mathbf{x}_H \in N_\varepsilon(H)$. Por lo tanto,

$$G \star H \subset \bigcap_{\varepsilon > 0} (N_\varepsilon(G) \star N_\varepsilon(H)).$$

□

Proposición 2.17. Si $G \subset X \times Y$, $H \subset Y \times Z$, y T un espacio topológico. Si $g : T \rightarrow G$ y $h : T \rightarrow H$ son funciones continuas y $\pi_Y(g(t)) = \pi_Y(h(t))$ para cada $t \in T$, entonces $g \star h : T \rightarrow G \star H$, donde $(g \star h)(t) = g(t) \star h(t)$ para cada $t \in T$, es continua.

Demostración. Veamos que $g \star h$ está bien definida. Sea $t \in T$, si $(g \star h)(t) = z_1$ y $(g \star h)(t) = z_2$ tal que $z_1 \neq z_2$, entonces $\pi_Y((g \star h)(t)) = \pi_Y(g(t) \star h(t)) = \pi_Y(g(t)) \cap \pi_Y(h(t)) = \pi_Y(g(t)) = \pi_Y(h(t))$, pero como $z_1 \neq z_2$, $\pi_X(z_1) = g(t)$, $\pi_X(z_2) = h(t)$ y $\pi_X(z_1) \neq \pi_X(z_2)$ tenemos que $g(t)$ no estaría bien definida. Por lo tanto, $z_1 = z_2$.

Supongamos que $t \in T$, y $U = U_X \times U_Y \times U_Z$ es un abierto básico del conjunto $X \times Y \times Z$ tal que $g(t) \star h(t) \in U$. Entonces $U \cap G \star H$ es un abierto en $G \star H$. Como g y h son continuas existen abiertos V_1 y V_2 en T con $t \in V_1, V_2$, tal que $g(V_1) \subset G \cap (U_X \times U_Y)$ y $h(V_2) \subset H \cap (U_Y \times U_Z)$. Entonces $V_1 \cap V_2$ es un abierto en T , y si $s \in V_1 \cap V_2$, $g(s) \star h(s) \in U \cap (G \star H)$. Por lo tanto, $(g \star h)(t)$ es continua. □

2.2.3. Límites Inversos Generalizados que son productos IM

Consideremos una cantidad finita de funciones de ligadura

$$\{f_i : I_{i+1} \rightarrow 2^{I_i}\}_{i=m}^n$$

y el siguiente espacio

$$G_{m,n} = \{x_m, x_{m+1}, \dots, x_n\} \in \prod_{i=m}^n x_i \in f_i(x_{i+1}), m \leq i \leq n\}.$$

Si $m = 1$ solo escribimos G_n .

Observemos que $G_{m,n}$ también lo podemos ver en términos de productos IM

$$G_{m,n} = \Gamma_m(f_m) \star \Gamma_{m+1}(f_{m+1}) \star \dots \star \Gamma_n(f_n).$$

y lo denotaremos como $\star_{i \in [m, n]} \Gamma_i(f_i)$

Para una cantidad infinita de funciones de ligadura

$$\{f_i : I_{i+1} \rightarrow 2^{I_i}\}_{i=n}^{\infty},$$

escribimos $\star_{i \in [n, \infty)} \Gamma_i(f_i)$.

Observemos que $\star_{[m, n]} \Gamma(f_i)$ es igual a

$$\begin{aligned} & \left\{ (x_m, \dots, x_n) \in \prod_{i \in [m, n]} I_i : \text{para cada } i \in [m, n], (x_{i+1}, x_i) \in \Gamma(f_i) \right\} \\ &= \left\{ (x_m, \dots, x_n) \in \prod_{i \in [m, n]} I_i : \text{para cada } i \in [m, n], x_i \in f_i(x_{i+1}) \right\} = G_{m, n}. \end{aligned}$$

Proposición 2.18. Para $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$G_n = \Gamma_1^{-1}(f_1) \star \Gamma_2^{-1}(f_2) \star \dots \star \Gamma_n^{-1}(f_n),$$

donde $\Gamma_i^{-1}(f_i)$ es la gráfica de f_i^{-1} . Además, si para cada $i \in \mathbb{N}$ $f_i : I_{i+1} \rightarrow 2^{I_i}$ es una función de ligadura usc, entonces

$$\varprojlim \{I_i, f_i\} = \Gamma_1^{-1}(f_1) \star \Gamma_2^{-1}(f_2) \star \dots$$

Demostración. Sea $x \in G_n$, entonces $x_i \in f_i(x_{i+1})$ para $1 \leq i \leq n$, esto implica que $x_{i+1} \in f_i^{-1}(x_i)$, por lo que $(x_i, x_{i+1}) \in \Gamma_i(f_i)$, para $1 \leq i \leq n$ de aquí $(x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \in \Gamma_{i+1}(f_{i+1}) \star \Gamma_i(f_{i+2}) \star \dots \star \Gamma_n(f_n)$. Por lo tanto $x \in G_1 \star G_2 \star \dots \star G_n$.

Sea $x \in G_1 \star G_2 \star \dots \star G_n$, entonces para cada $1 \leq i \leq n$ ocurre que $(x_1, \dots, x_i) \in G_1 \star \dots \star G_i$ y $(x_i, \dots, x_n) \in G_i \star \dots \star G_n$. De aquí que $(x_i, x_{i+1}) \in G_i$, es decir $x_{i+1} \in f_i^{-1}(x_i)$. Por lo tanto $x \in G_n$.

De manera análoga se demuestra la otra parte de la proposición. \square

De lo anterior, el límite inverso con funciones de ligadura usc puede ser representado como una subcolección de productos IM.

Los productos IM también pueden verse en el siguiente contexto: supongamos que $N \leq M < L$ son enteros positivos y para cada $1 \leq i \leq L$, $f_i : I_{i+1} \rightarrow 2^{I_i}$ son funciones de ligadura usc. Si

$$G = \star_{[1,M]} \Gamma(f_i) \text{ y } H = \star_{[N,L]} \Gamma(f_i)$$

entonces

$$G \star H = \star_{[1,L]} \Gamma(f_i)$$

A continuación mostraremos algunos resultados mas que nos ayudarán en las secciones siguientes.

Definición 2.8. Sea X es un espacio topológico. Diremos que $C = \{C_1, C_2, \dots, C_P\}$ es una cadena simple en X si cada $C_i \subset X$ y $C_i \cap C_j \neq \emptyset$ si y sólo si $|i - j| \leq 1$. A cada C_i le llamaremos eslabon. Diremos que C es una cadena simple que va del punto $a \in X$ al punto $b \in X$, si $a \in C_1$ y es el único eslabón que lo contiene, $b \in C_P$ y es el único eslabón que lo contiene.

Lema 2.4. Supongamos que X es un espacio métrico y conexo, y \mathcal{H} una colección finita de conjuntos cerrados que cubren a X . Si $a, b \in X$, entonces existe una cadena simple $H = \{H_1, H_2, \dots, H_n\}$ que va del punto a al punto b , tal que $H_i \in \mathcal{H}$ para cada $i = 1, 2, \dots, n$.

Demostración. Supongamos que $a, b \in X$. Sea

$$Y_a = \{p \in X :$$

existe una cadena simple de a a p tal que sus eslabones estan en $\mathcal{H}\}$.

Entonces, $Y_a \neq \emptyset$ pues $a \in Y_a$. Notemos que si $y \in X$, entonces

$$\mathcal{C}_y = \{H \in \mathcal{H} : y \in H\}$$

es una subcolección finita de \mathcal{H} que contiene un subconjunto abierto u_y , tal que $y \in u_y$, y $u_y \subset \bigcup \mathcal{C}_y$, y que no interseca a ningún $H \in \mathcal{H}$ tal que $y \notin H$.

Afirmación 1 Y_a es cerrado.

Supongamos que $\{p_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión tal que $p_i \in Y_a$ para $i \in \mathbb{N}$ que converge a p . Entonces, existe un abierto u_p tal que $p \in u_p \subset \bigcup \mathcal{C}_p$ y u_p no interseca a ningún elemento de \mathcal{H} que no están en \mathcal{C}_p . De esta manera existe $i \in \mathbb{N}$ tal que

$p_i \in u_p$. Esto implica que existe una cadena simple $H = \{H_1, H_2, \dots, H_n\}$, donde $H_j \in \mathcal{H}$ con $j = 1, 2, \dots, n$, que va de a a p_i . Como $p_i \in u_p$, $p_i \in H_n \in \mathcal{C}_p$, tenemos que $p \in H_n$. Entonces existe al menos un i tal que $p \in H_i$, y $H' = \{H_1, H_2, \dots, H_i\}$, es una cadena simple que va de a a p . Por lo tanto $p \in Y_a$, y Y_a es cerrado en X .

Afirmación 2 Y_a es abierto.

Si $p \in Y_a$, entonces existe u_p abierto tal que $p \in u_p$, y $u_p \subset \bigcup \mathcal{C}_p$ y que no interseca a ningún elemento de \mathcal{H} que contiene a p . Supongamos que $q \in u_p$ y $q \notin Y_a$. Existe una cadena simple $L = \{L_1, L_2, \dots, L_m\}$ compuesta por elementos de \mathcal{H} que va de a a p . Entonces q no está en ningún elemento de L_i , porque de otro forma existiría una cadena simple de elementos de \mathcal{H} que va de a a q . Pero, q está en algún $H \in \mathcal{C}_p$. Así que existe al menos un i tal que $L_i \cap H \neq \emptyset$. Entonces, $L' = \{L_1, L_2, \dots, L_i, H\}$ una cadena simple de elementos de \mathcal{H} que va de a a q . Así $q \in Y_a$, y Y_a es abierto en X .

De lo anterior, como Y_a es abierto y cerrado de un espacio conexo X . Se tiene que $Y_a = X$. \square

Anunciaremos un último teorema que nos ayudará en la siguiente sección.

Definición 2.9. Una función $f : A \rightarrow B$ a trozos es una función cuya gráfica es unión de líneas rectas.

Teorema 2.16. (Teorema de escalación) [2] Si f y g son funciones lineales a trozos y tienen a 0 y 1 como puntos fijos, entonces existen funciones a trozos $h, j : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ que tienen como puntos fijos a 0 y 1 tal que $f \circ j = g \circ h$.

2.2.4. Límites inversos conexos

A continuación mostramos resultados dados por S. Greenwood y J. Kennedy.

Teorema 2.17. Sean X, Y y Z son espacios métricos, $V \subset Y$ abierto tal que $V \neq Y$, G un subconjunto cerrado en $X \times Y$, y H un subconjunto cerrado en $Y \times Z$. Si

1. $\pi_Y(G \star H)$ no es subconjunto de V ,

2. $\pi_Y(G \star H) \cap V \neq \emptyset$, y
3. $\pi_Y(G) \cap \pi_Y(H) \cap \partial V = \emptyset$,

entonces $G \star H$ no es conexo.

Demostración. Sean $E_1 = \pi_Y^{-1}(\bar{V}) \cap (G \star H)$, $V^c = Y \setminus V$, y $E_2 = \pi_Y^{-1}(V^c) \cap (G \star H)$. Entonces E_1 y E_2 son subconjuntos no vacíos y cerrados en $G \star H$ y $E_1 \cup E_2 = G \star H$.

Supongamos $(x, y, z) \in E_1 \cap E_2$, entonces

$$\begin{aligned} (x, y, z) &\in [\pi_Y^{-1}(\bar{V}) \cap (G \star H)] \cap [\pi_Y^{-1}(V^c) \cap (G \star H)] \\ &= \pi_Y^{-1}(\bar{V}) \cap \pi_Y^{-1}(V^c) \cap (G \star H) \\ &= \pi_Y^{-1}(\bar{V} \cap V^c) \cap (G \star H). \end{aligned}$$

De aquí que $(x, y, z) \in \pi_Y^{-1}(\bar{V} \cap V^c)$, esto implica que $y \in \bar{V} \cap V^c$, esto es imposible pues $\pi_Y(G) \cap \pi_Y(H) \cap \partial V = \emptyset$. Así, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. Por lo tanto, $G \star H$ no es conexo. \square

Corolario 2.1. Sean $N \leq M < L$ son enteros positivos, V es un abierto de $\prod_{i=N}^M I_i$ y para cada $1 \leq i \leq L$, $f_i : I_{i+1} \rightarrow 2^{I_i}$ es función de ligadura usc. Sean

$$G = \star_{[1,M]} \Gamma(f_i) \quad y \quad H = \star_{[N,L]} \Gamma(f_i)$$

así

$$G \star H = \star_{[1,L]} \Gamma(f_i)$$

Si

1. $\pi_{[N,M]}(G \star H)$ no es subconjunto de V ,
2. $\pi_{[N,M]}(G \star H) \cap V \neq \emptyset$, y
3. $\pi_{[N,M]}(G) \cap \pi_{[N,M]}(H) \cap \partial V = \emptyset$

entonces

$$G \star H = \star_{[1,L]} \Gamma(f_i)$$

no es conexo.

Lema 2.5. Sea $Y = I = [0, 1]$, sean X y Z productos infinitos de intervalos, $G \subset X \times Y$ y $H \subset Y \times Z$ conexos que son unión finita de conjuntos cerrados con interior no vacío, y

$$\pi_I(G) = I = \pi_I(H).$$

Entonces existe un subcontinuo K en $G \star H$ tal que $\pi_Y(K) = \pi_I(K) = I$. Además, si $\mathbf{x}_1 \in G$ y $N \in \mathbb{N}$ son tales que $\pi_N(\mathbf{x}_1) = 0$, $\mathbf{y}_1 \in G$ tal que $\pi_N(\mathbf{y}_1) = 1$, $\mathbf{x}_2 \in H$ tal que $\pi_N(\mathbf{x}_2) = 0$, y $\mathbf{y}_2 \in H$ tal que $\pi_N(\mathbf{y}_2) = 1$, entonces K puede ser elegido de tal forma que contenga a los puntos $\mathbf{x}_1 \star \mathbf{x}_2$ y $\mathbf{y}_1 \star \mathbf{y}_2$.

Demostración. Supongamos que $X = \prod_{\alpha=0}^{N-1} I_\alpha$ y $Z = \prod_{\alpha=N+1}^M I_\alpha$, donde cada I_α es un intervalo cerrado y $1 \leq N < M$, con N y M enteros no negativos. Sean $G = \bigcup_{i=1}^n G_i$, donde cada G_i es un subconjunto cerrado con interior no vacío y $H = \bigcup_{j=1}^m H_j$, donde cada H_j es un subconjunto cerrado con interior no vacío (cada G_i y H_j es un producto de intervalos cerrados no degenerados). Sea $\mathcal{G} = \{G_i : 1 \leq i \leq n\}$ y $\mathcal{H} = \{H_j : 1 \leq j \leq m\}$.

Como $\mathbf{x}_1 \in G$ es tal que $\pi_N(\mathbf{x}_1) = 0$, $\mathbf{y}_1 \in G$ es tal que $\pi_N(\mathbf{y}_1) = 1$, $\mathbf{x}_2 \in H$ es tal que $\pi_N(\mathbf{x}_2) = 0$ y $\mathbf{y}_2 \in H$ tal que $\pi_N(\mathbf{y}_2) = 1$, aplicando el Lema 2.4, existe una cadena simple $C = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ de elementos de \mathcal{G} , con $\mathbf{x}_1 \in C_1$ y $\mathbf{y}_1 \in C_k$, y también existe una cadena simple $D = \{D_1, D_2, \dots, D_l\}$ de elementos de \mathcal{H} con $\mathbf{x}_2 \in D_1$ y $\mathbf{y}_2 \in D_l$. Existe un arco poligonal P en $\bigcup C$, con puntos finales \mathbf{x}_1 y \mathbf{y}_1 , y existe un arco poligonal Q en $\bigcup D$ con puntos finales \mathbf{x}_2 y \mathbf{y}_2 . Como P y Q son arcos poligonales existen funciones lineales a trozos continuas sobreyectivas $g : [0, 1] \rightarrow P$ y $h : [0, 1] \rightarrow Q$ tales que $g(0) = \mathbf{x}_1$, $g(1) = \mathbf{y}_1$, $h(0) = \mathbf{x}_2$, y $h(1) = \mathbf{y}_2$. Entonces $\pi_N \circ g, \pi_N \circ h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ son funciones continuas lineales a trozos y $(\pi_N \circ g)(0) = 0$, $(\pi_N \circ g)(1) = 1$, $(\pi_N \circ h)(0) = 0$ y $(\pi_N \circ h)(1) = 1$. Aplicando el Teorema de Escalación existen funciones lineales a trozos $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tales que $\alpha(0) = 0 = \beta(0)$, $\alpha(1) = 1 = \beta(1)$, y $\pi_N \circ g \circ \alpha = \pi_N \circ h \circ \beta$.

Definamos la función $\Psi : [0, 1] \rightarrow P \star Q$ de la siguiente manera $\Psi(t) = (g \circ \alpha)(t) \star (h \circ \beta)(t)$. Por la Proposición 2.17, la función Ψ es continua. Así $K = \Psi([0, 1])$ es un continuo en $P \star Q$. Como $\Psi(0) = \mathbf{x}_1 \star \mathbf{x}_2$, $\Psi(1) = \mathbf{y}_1 \star \mathbf{y}_2$ y $\pi_N = (\mathbf{x}_1 \star \mathbf{x}_2) = 0$, $\pi_N = (\mathbf{y}_1 \star \mathbf{y}_2) = 1$ tenemos que $\pi_Y(K) = I$. \square

Notación

- Si J es un intervalo entonces $|J|$ denotará la longitud de J .
- Diremos que $I^{[M,N]} = \prod_{i=M}^N I_i$, donde N, M son enteros positivos

Teorema 2.18. *Si G es un continuo en $I^{[0,N]}$ tal que $\pi_N(G) = I_N$ y H un continuo en $I^{[N,M]}$, tal que $\pi_N(H) = I_N$. Entonces existe alguna componente C de $G \star H$ tal que $\pi_N(C) = I_N$. Además, si $\mathbf{x}_1 \in G$ es tal que $\pi_N(\mathbf{x}_1) = 0$; $\mathbf{y}_1 \in G$ es tal que $\pi_N(\mathbf{y}_1) = 1$; $\mathbf{x}_2 \in H$ es tal que $\pi_N(\mathbf{x}_2) = 0$; $\mathbf{y}_2 \in H$ es tal que $\pi_N(\mathbf{y}_2) = 1$, entonces C se puede elegir de modo que contenga a los puntos $\mathbf{x}_1 \star \mathbf{x}_2$ y $\mathbf{y}_1 \star \mathbf{y}_2$.*

Demostración. Hagamos $X = \prod_{j=0}^{N-1} I_j$ y $Z = \prod_{j=N+1}^M I_j$. Entonces $G \subset X \times I_N$, y $H \subset I_N \times Z$. Para cada entero positivo k , existe una cubierta finita $U_k = \{u_{k_i} : 1 \leq i \leq j_k\}$ de G por abiertos básicos tales que $u_{k_i} \in U_k$ contiene un punto de G y $|\pi_p(u_{k_i})| < \frac{1}{k(M+1)}$, para $0 \leq p \leq N$. De igual forma, existe una cubierta finita $V_k = \{v_{k_j} : 1 \leq j \leq n_k\}$ de H por básicos abiertos tales que cada $v_{k_j} \in V_k$ contiene un punto de H y $|\pi_p(v_{k_j})| < \frac{1}{k(M+1)}$, para $N \leq p \leq M$. Además,

$$G_k = \overline{\bigcup_{i=1}^{j_k} u_{k_i}} \quad \text{y} \quad H_k = \overline{\bigcup_{j=1}^{n_k} v_{k_j}}$$

son continuos en $X \times I_N$ y $I_N \times Z$ respectivamente. Entonces

$$\bigcap_{i=1}^{j_k} u_{k_i} = G \quad \text{y} \quad \bigcap_{j=1}^{n_k} v_{k_j} = H.$$

Así, por la Proposición 2.16, $\bigcap (G_k \star H_k) = G \star H$. Por el Lema 2.5, existe un continuo $C_k \subset G_k \star H_k$ tal que $\pi_N(C_k) = I_N$.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que la sucesión C_1, C_2, \dots converge al continuo C relativo a la métrica de Hausdorff. Puesto que $\pi_N(C_k) = I_N$ para cada k , $\pi_N(C) = I_N$. Además, $C \subset G \star H$ ya que $C_k \subset G_k \star H_k$.

Así podemos elegir C_k tal que $\mathbf{x}_1 \star \mathbf{x}_2$ y $\mathbf{y}_1 \star \mathbf{y}_2$ están en C_k . Por lo tanto C contiene los puntos $\mathbf{x}_1 \star \mathbf{x}_2$ y $\mathbf{y}_1 \star \mathbf{y}_2$. \square

Corolario 2.2. *Sean N, M enteros positivos tal que $N < M$, y para cada $1 \leq i \leq M$, $f_i : I_{i+1} \rightarrow 2^{I_i}$ es una función de ligadura sobreyectiva usc. Si $G = \star_{[1,N]} \Gamma(f_i)$,*

es conexo y $G = \star_{[N,M]}\Gamma(f_i)$, entonces

$$G \star H = \star_{[1,M]}\Gamma(f_i)$$

y existe un continuo K en $G \star H$ tal que $\pi_N(K) = I_N$.

Corolario 2.3. Sea N un entero positivo y para cada $i \geq 1$, $f_i : I_{i+1} \rightarrow 2^{I_i}$ es una función de ligadura usc sobreyectiva. Si $G = \star_{[1,N]}\Gamma(f_i)$ es conexo y $H = \star_{[N,\infty)}\Gamma(f_i)$ es conexo, entonces

$$G \star H = \star_{[1,\infty)}\Gamma(f_i)$$

y existe un continuo K en $G \star H$, tal que $\pi_N(K) = I_N$.

Corolario 2.4. Sea M un entero positivo tal que $M \geq 2$, y para cada $1 \leq i \leq M$, $f_i : I_{i+1} \rightarrow 2^{I_i}$ es una función de ligadura usc sobreyectiva cuya gráfica $\Gamma(f_i)$ es conexa. Si $X = \star_{[1,M]}\Gamma(f_i)$ entonces existe un continuo no degenerado $K \subseteq X$.

Demostración. Sean $X_i = \star_{[1,i]}\Gamma(f_i)$ para $2 \leq i < M$, y $G_i = G(f_i^{-1})$ para $1 \leq i \leq M$. Por el Teorema 2.18, existe una componente C_2 de X_2 tal que $\pi_1(C_2) = I_1$.

- Ahora, si $\pi_2(C_2)$ es degenerado, existe $z_2 \in I_2$ tal que $\pi_2(C_2) = \{z_2\}$ y existe $\mathbf{z}_2 \in Y_2$ tal que $\pi_2(\mathbf{z}_2) = z_2$. Entonces $C_2 \star \{\mathbf{z}_2\}$ es un continuo no degenerado que está en X .
- Por el contrario si $\pi_2(C_2)$ es no degenerado y existe algún intervalo $[a_2, b_2]$ con $a_2 < b_2$ tal que $\pi_2(C_2) = [a_2, b_2]$, existe G'_3 un subconjunto cerrado de G_3 tal que G'_3 es conexo y $\pi_2(G'_3) = [a_2, b_2]$. Aplicando el Teorema 2.18, existe un continuo C_3 en $C_2 \star G'_3$ tal que $\pi_2(C_3) = [a_2, b_2]$. Notemos que $C_2 \star G'_3 \subset X_3$, si $M = 3$ se tiene el resultado.
- Este proceso finito continua: Si $M > 3$, y $\pi_3(C_3)$ es degenerado, existe z_3 tal que $\pi_3(C_3) = \{z_3\}$ y existe $\mathbf{z}_3 \in Y_3$ tal que $\pi_3(\mathbf{z}_3) = z_3$. Entonces, $C_3 \star \{\mathbf{z}_3\}$ es un continuo no degenerado en X . Por el contrario, si $\pi_3(C_3)$ es no degenerado y existe algún intervalo $[a_3, b_3]$ con $a_3 < b_3$ tal que $\pi_3(C_3) = [a_3, b_3]$. También existe G'_4 un subconjunto cerrado de G_4 tal que G'_4 es

conexo y $\pi_3(G'_4) = [a_2, b_2]$, y aplicando el Teorema 2.18, existe un continuo C_3 en $C_2 \star G'_3$ tal que $\pi_2(C_3) = [a_3, b_3]$. Notemos que $C_3 \star G'_4 \subset X_4$, si $M = 4$ se tiene el resultado.

- Este proceso termina hasta M o antes, con un continuo no degenerado $C_{M-1} \star \{z_{M-1}\} \subset X_M = X$ (si, $\pi_{M-1}(C_{M-1})$ es degenerado) o un continuo no degenerado $C_M \subset C_{M-1} \star G'_M \subset X_M = X$ (si $\pi_{M-1}(C_{M-1})$ es no degenerado).

□

Corolario 2.5. Sea $G \subset I^{[1,N]}$ es un subconjunto cerrado y conexo, $H \subset I^{[N,M]}$ un subconjunto cerrado y conexo. Si para cada componente de $G \star H$, $\pi_N(C) = I_N$. Entonces $G \star H$ es conexo.

Demostración. Sean $X = \prod_{i=0}^{N-1} I_i$, $Y = I_N$ y $Z = \prod_{i=N+1}^M I_i$. Entonces $G \subset X \times Y$ y $H \subset Y \times Z$.

Supongamos que $G \star H$ no es conexo, entonces existen dos componentes no vacías, disjuntas C_1 y C_2 en $G \star H$ que cumplen $\pi_N(C_1) = I_N$ y $\pi_N(C_2) = I_N$, así, existen $\mathbf{x} \in C_1 \cap \pi_N^{-1}(\{0\})$ y $\mathbf{y} \in C_2 \cap \pi_N^{-1}(\{1\})$.

Entonces $\mathbf{x}_G = \pi_{X \times I_N}(\mathbf{x}) \in G$, $\mathbf{y}_G = \pi_{X \times I_N}(\mathbf{y}) \in G$ y $\mathbf{x}_H = \pi_{I_N \times Z}(\mathbf{x}) \in H$, $\mathbf{y}_H = \pi_{I_N \times Z}(\mathbf{y}) \in H$, aplicando el Teorema 2.18, existe un continuo D en $G \star H$ tal que $\mathbf{x}_G \star \mathbf{x}_H = \mathbf{x}$ y $\mathbf{y}_G \star \mathbf{y}_H = \mathbf{y}$ están en D . Pero esto es una contradicción porque tendríamos que $D \subset C_1 \cup C_2$ con C_1, C_2 disjuntos y $C_1 \cap D \neq \emptyset \neq C_2 \cap D$. □

Corolario 2.6. Sean N, M enteros positivos tales que $N < M$ y para cada $1 \leq i \leq M$, $f_i : I_{i+1} \rightarrow 2^{I_i}$ son funciones de ligadura sobreyectivas y usc cuya gráfica es $\Gamma(f_i)$ es conexa. Si

$$G = \star_{[1,N]} \Gamma(f_i) \quad \text{y} \quad H = \star_{[N,M]} \Gamma(f_i)$$

son conexos, y la proyección de cada componente de $G \star H = \star_{[N,M]} \Gamma(f_i)$ sobre I_N es I_N . Entonces $G \star H$ es conexo.

Corolario 2.7. Sea $N \in \mathbb{N}$ y para cada $i \geq 1$, $f_i : I_{i+1} \rightarrow 2^{I_i}$ son funciones de ligadura sobreyectivas y usc cuya gráfica $\Gamma(f_i)$ es conexa. Si

$$G = \star_{[1,N]}\Gamma(f_i) \quad \text{y} \quad H = \star_{[N,\infty)}\Gamma(f_i)$$

son conexos, y la proyección de cada componente K de

$$G \star H = \star_{[1,\infty)}\Gamma(f_i)$$

es sobre I_N es I_N . Entonces $G \star H$ es conexo.

Capítulo 3

No conexidad

En este capítulo mostraremos las condiciones para que el límite inverso no sea conexo. Comenzamos con el siguiente teorema que usa como condición que si la gráfica de las funciones de ligadura o la composición de ellas no es conexa entonces el límite inverso no es conexo.

Teorema 3.1. *Sea $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos cerrados de $[0, 1]$ y $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones usc sobreyectivas $f_i : X_{i+1} \rightarrow 2^{X_i}$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Si existen $m, n \in \mathbb{N}$ con $m < n$ y $\Gamma(f_{mn})$ no es conexo, entonces $\varprojlim \{X_i, f_i\}$ no es conexo.*

Demostración. Si $\varprojlim \{X_i, f_i\}$ es conexo y $m, n \in \mathbb{N}$ con $m < n$ entonces $\pi_{\{m, n\}}(\varprojlim \{X_i, f_i\}) = (\Gamma(f_{mn}))^{-1}$ es un conjunto conexo. Por otra parte $\Gamma(f_{mn})$ no es conexo, entonces existen conjuntos A y B disjuntos y cerrados tales que $\Gamma(f_{mn}) = A \cup B$ y $A \cap B = \emptyset$, de aquí $(\Gamma(f_{mn}))^{-1} = (A \cup B)^{-1} = A^{-1} \cup B^{-1}$ y $A^{-1} \cap B^{-1} = \emptyset$, donde $A^{-1} = f_{mn}^{-1}(A)$, $B^{-1} = f_{mn}^{-1}(B)$, puesto que A y B son cerrados entonces A^{-1} y B^{-1} son cerrados. Por lo que $(\Gamma(f_{mn}))^{-1}$ no es conexo. De aquí que $\varprojlim \{X_i, f_i\}$ no es conexo. \square

A continuación mostramos un par de ejemplos, en donde se aplica este teorema.

Ejemplo 3.1. Sea $f : [0, 1] \rightarrow 2^{[0,1]}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \{0, x\} & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{4}, \\ 0 & \text{si } \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4}, \\ \{3x - 2, 0\} & \text{si } \frac{3}{4} \leq x < 1, \\ I = [0, 1] & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

y $f(1) = [0, 1]$, cuya gráfica la podemos ver en la Figura 3.4.

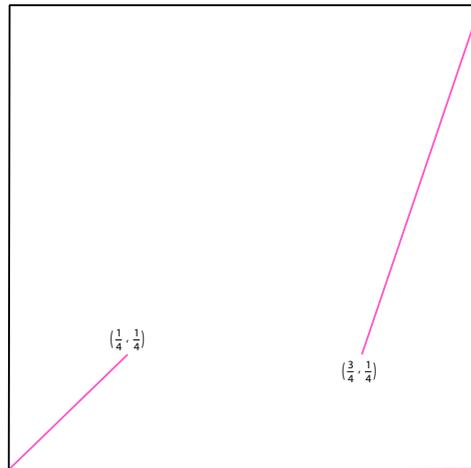


Figura 3.1: $\Gamma(f)$

Sea $K = \varprojlim \{X_i, f_i\}$ donde $X_i = [0, 1]$, y $f_i = f$ para todo $i \in \mathbb{N}$, $\Gamma(f^2)$ es la Figura 3.2.

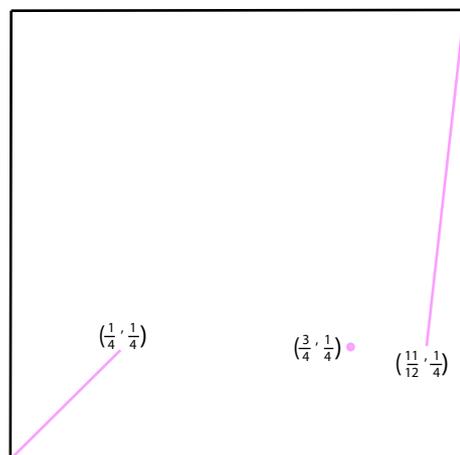


Figura 3.2: $\Gamma(f^2)$

Notemos que $(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$ es un punto aislado, por tanto $\Gamma(f^2)$ no es conexo. Por el Teorema 3.1, K no es conexo.

3.1. Productos Ingram-Mahavier y CC-sucesiones

En esta sección mostramos resultados dados por Sina Greenwood, Judy Kennedy y Michael Lockyer quienes introdujeron nuevos conceptos como son CC-sucesiones y bases componentes para poder caracterizar a las gráficas de funciones de ligadura y determinar cuantas componentes tiene un límite inverso, en [5]. A continuación daremos algunas definiciones y la notación que se necesita para abordar esta herramienta.

Definición 3.1. Si I y $f : I \rightarrow 2^I$ es una función usc sobreyectiva que tiene gráfica conexa diremos que f es completa.

Si para cada $i \in \mathbb{N}$, $I_i = [0, 1]$, \mathbf{f} es una sucesión de funciones $f_{i+1} : I_{i+1} \rightarrow 2^{I_i}$ y cada f_i es completa, entonces la sucesión \mathbf{f} se dice completa.

Definición 3.2. Supongamos que f es completa. Si H es un subcontinuo de $\Gamma(f)$ y para cada $x \in [0, 1]$, $(\{x\} \times f(x)) \cap H = \emptyset$, o $(\{x\} \times f(x)) \cap H$ es conexo, entonces H es una subgráfica fibra-conexa de $\Gamma(f)$.

Definición 3.3. Si f es completa y se cumple lo siguiente:

1. Para κ un ordinal y para cada $\alpha < \kappa$, $\Gamma_\alpha \subset \Gamma(f)$ es una subgráfica fibra-conexa de $\Gamma(f)$;
2. $\Gamma(f) = \bigcup \{\Gamma_\alpha : \alpha < \kappa\}$;
3. para cada $\alpha < \kappa$, $\Gamma(f) \neq \bigcup \{\Gamma_\beta : \beta < \kappa, \beta \neq \alpha\}$, y
4. Si H es una subgráfica fibra-conexa de $\Gamma(f)$ tal que $\Gamma_\alpha \subseteq H$ para algún α , entonces $\Gamma_\alpha = H$,

entonces $\{\Gamma_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una descomposición de $\Gamma(f)$ en subgráficas fibra-conexa. Si $\kappa = 1$ entonces $\Gamma(f)$ es fibra-conexa.

Para lo que sigue solo consideraremos descomposiciones finitas de una gráfica en subgráficas fibra-conexa, es decir κ es un ordinal finito.

Banič y Kennedy en [1, Teorema 4.5], mostraron el siguiente resultado.

Teorema 3.2. Si f es una sucesión completa entonces $\lim_{\leftarrow} f$ tiene al menos una componente C tal que para cada $i \in \mathbb{N}$, $\pi_{i+1,i}(C) = \Gamma(f_i)$.

El siguiente corolario se sigue de este Teorema.

Corolario 3.1. Si f es una sucesión completa, entonces para $n \in \mathbb{N}_0$, $\star_{i \in [1,n]} \Gamma(f_i)$, tiene una componente C tal que para cada $i < n$, $\pi_{i+1,i}(C) = \Gamma(f_{i+1})$.

Definición 3.4. Supongamos que f es una sucesión completa y que C es una componente de $\lim_{\leftarrow} f$. Entonces C es grande si para cada $i \in \mathbb{N}$, $\pi_{i+1,i}(C) = \Gamma(f_{i+1})$, y C es pequeña si no es grande.

Definición 3.5. Sean $m, n > 1$ y para cada $i \in [m, n]$, $T_i \subset \Gamma(f_i)$. Si para cada $i \in \mathbb{N}$, $\pi_{i+1,i}(D) = T_{i+1}$ entonces D es una componente grande de $\star_{i \in [1,n]} T_i$.

Proposición 3.1. Sea $n \in \mathbb{N}$. Si para cada $i \in [1, n]$, X_i es de un solo elemento o un intervalo cerrado, $f_i : X_{i+1} \rightarrow 2^{X_i}$ es completa. Entonces $\star_{i \in [1,n]} \Gamma(f_i)$ tiene una componente C tal que para cada $i < n$, $\pi_{i+1,i}(C) = \Gamma(f_i)$.

Demostración. Supongamos que los espacios X_{j_1}, \dots, X_{j_m} son no singulares, donde $j_1 < \dots < j_m$ y los espacios $X_{k_1}, \dots, X_{k_{n-m}}$ son de un solo elemento, donde $k_1 < \dots < k_{n-m}$.

El resultado es trivial si $j_m = 1$, supongamos que $j_m > 1$.

Para cada $i \in [1, m-1]$,

- si $j_{i+1} = j_i + 1$, definimos a $g_{i+1} : X_{j_{i+1}} \rightarrow 2^{X_{j_i}}$ como la función f_{j_i}
- si $j_{i+1} \neq j_i + 1$, definimos a $g_{i+1} : X_{j_{i+1}} \rightarrow 2^{X_{j_i}}$ como la función cuya gráfica es $X_{j_{i+1}} \times X_{j_i}$

Por el Corolario 3.1 $\star_{i \in [1, m]} \Gamma(g_i)$ tiene una componente grande C .

Supongamos que

$$h : \star_{i \in [1, n]} \Gamma(f_i) \rightarrow \star_{i \in [1, m]} \Gamma(g_i)$$

es la proyección natural, dada por $h((x_0, x_1, \dots, x_n)) = (x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_m})$. Dado que f_i es sobreyectiva para cada $i \in [1, n]$ y cada X_{k_i} , con $i \in [1, n-m]$ es de un solo elemento, se sigue que h es biyectiva y como h y h^{-1} son continuas, entonces h es un homeomorfismo.

Así, $h^{-1}(C)$ es una componente de $\star_{i \in [1, n]} \Gamma(f_i)$ y claramente $h(C)$ es una componente grande de $\star_{i \in [1, m]} \Gamma(g_i)$. \square

Proposición 3.2. Si para cada $i \in \mathbb{N}$, X_i es singular o un intervalo cerrado, y $f_{i+1} : X_{i+1} \rightarrow 2^{X_i}$ es completa. Entonces $\varprojlim \mathbf{f}$ tiene una componente C tal que para cada $i > 0$, $\pi_{i+1, i}(C) = \Gamma(f_i)$.

3.2. Bases componentes

En esta sección comenzaremos dando algunas definiciones previas para poder definir una base componente. Daremos ejemplos y lemas que están diseñados para dar claridad a las bases componentes; esto es, cómo detectarlas, crearlas y aplicarlas.

El concepto de base componente es introducida por Sina Greenwood y Judy Kennedy en [3], que en un principio es definida como CC-sucesión. El resultado principal es el siguiente

Teorema 3.3. *Si las funciones de ligadura admiten una CC-sucesión si y solo si el límite inverso no es conexo.*

La existencia de una CC-sucesión es equivalente a la existencia de una base componente débil la cual definimos ahora.

Definición 3.6. *Dados los intervalos cerrados $[a, b], [c, d] \subsetneq I$, sea $Z = [a, b] \times [c, d]$. Entonces*

- *el conjunto $(I \times (d, 1]) \cup ([0, a) \times I) \cup Z$ es un marco-TL.*
- *el conjunto $(I \times (d, 1]) \cup ([b, 1) \times I) \cup Z$ es un marco-TR.*
- *el conjunto $(I \times [0, c)) \cup ([0, a) \times I) \cup Z$ es un marco-BL.*
- *el conjunto $(I \times [0, c)) \cup ((b, 1] \times I) \cup Z$ es un marco-BR.*

Si $0 < a \leq b < 1$ y $0 < c \leq d < 1$ entonces

- *el conjunto $(I \times (d, 1]) \cup Z$ es un marco-T*
- *el conjunto $(I \times [0, c)) \cup Z$ es un marco-B*
- *el conjunto $([0, a) \times I) \cup Z$ es un marco-L*
- *el conjunto $((b, 1] \times I) \cup Z$ es un marco-R*

Si $\varepsilon > 0$, definimos

$$Z(\varepsilon) = ((a - \varepsilon, b + \varepsilon) \times (c - \varepsilon, d + \varepsilon)) \cap (I \times I)$$

Definición 3.7. *Supongamos que f es completa. Si*

$$Y \in \{T, B, L, R, BL, BR, TL, TR\}$$

y existen $\varepsilon > 0$ y C' una componente del conjunto $\Gamma(f) \cap Z(\varepsilon)$ tal que $C' \subset Y$, entonces cualquier componente C de $C' \cap Z$ es un Y -conjunto en $\Gamma(f)$. Si C es un Y -conjunto para cualquier Y entonces llamamos a C un S -conjunto.

Definición 3.8. Si f es una sucesión completa donde existen $m, n \in \mathbb{N}$, con $0 < m < n$, y para cada $i \in [m, n]$ existe un S -conjunto $S_i \subset \Gamma(f_i)$. Entonces $\langle S_m, \dots, S_n \rangle$ es una base componente débil siempre que se cumplan las siguientes condiciones:

1. Para cada $i \in [m - 1, n]$ existe un intervalo cerrado $A_i \subsetneq I_i$, $0, 1 \notin A_m$ y $0, 1 \notin A_{n-1}$ y para cada $i \in [m, n]$, $S_i \subset A_i \times A_{i-1}$;
2. existe un punto $(p_k) \in \varprojlim f$ tal que $(p_{m-1}, p_m, \dots, p_n) \in \star_{i \in [m, n]} S_i$;
3. El conjunto S_m es un L -conjunto o R -conjunto
4.
 - Si $n = m + 1$, entonces S_{m+1} es un B -conjunto si S_m es un R -conjunto, o un T -conjunto si S_m es un L -conjunto y
 - Si $n > m + 1$, entonces S_{m+1} es un BR -conjunto o BL -conjunto si S_m es un R -conjunto y S_{m+1} es un TR -conjunto o TL -conjunto si S_m es un L -conjunto.
5. Si $m + 1 < i < n - 1$, entonces S_{i+1} es un BL -conjunto o S_{i+1} es un BR -conjunto si S_i es un BR -conjunto o S_i es un TR -conjunto, y S_{i+1} es un TL -conjunto o S_{i+1} es un TR -conjunto si S_i es BL -conjunto o S_i es TL -conjunto
6. Si $n > m + 1$, entonces S_n es un B -conjunto si S_{n-1} es un BR -conjunto o TR -conjunto, y S_n es un T -conjunto si S_{n-1} es un BL -conjunto o TL -conjunto.

En la Figura 3.3 se muestra la forma de una base componente débil. Observe que un L -conjunto debe ser seguido por un TL -conjunto; un TR -conjunto o un T -conjunto, cada uno incluye a T . De manera similar un R -conjunto debe ser seguido por un BL -conjunto, BR -conjunto o un B -conjunto, cada uno incluye a B ; un TL -conjunto o un BL -conjunto debe ser seguido por un TL -conjunto, un TR -conjunto o un T -conjunto, que incluyen al conjunto L , y se siguen por los conjuntos que contienen a T . De igual forma un TR -conjunto o BR -conjunto debe ser seguido por un BL -conjunto, BR -conjunto o B -conjunto.

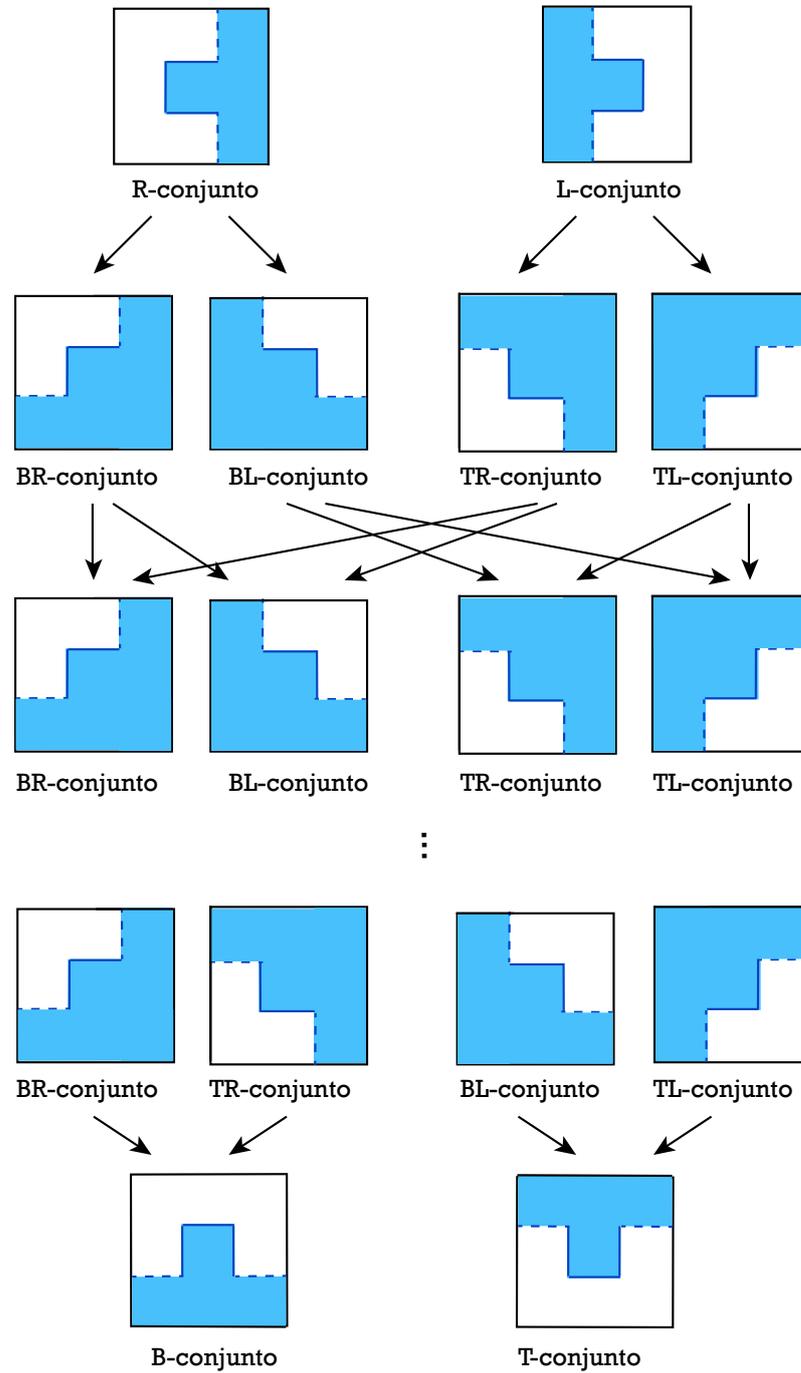


Figura 3.3: Base Componente débil

Teorema 3.4. Si f es una sucesión completa, C una componente de f , $\langle S_m, \dots, S_n \rangle$ es una base componente débil y $C \cap \pi_{[m-1, n]}^{-1}(\star_{i \in [m, n]} S_i) \neq \emptyset$, entonces

$$\pi_{[m-1, n]}(C) \subseteq \star_{i \in [m, n]} S_i.$$

La prueba de este teorema es la prueba del Teorema 3.1 en [3].

Definición 3.9. Si f es una sucesión completa, $\sigma = \langle S_m, \dots, S_n \rangle$ es una base componente débil, ninguna subsucesión de σ es base componente débil, y existe una componente C de $\lim_{\leftarrow} f$ tal que para cada $i \in [m, n]$, $\pi_{i, i-1}(C) = S_i$, se dice σ es una base componente y C es capturado por $\langle S_m, \dots, S_n \rangle$. Si D es una componente de $\lim_{\leftarrow} f$ y para cada $i \in [m, n]$, $\pi_{i, i-1}(D) \subset S_i$, se dice D es capturada débilmente por $\langle S_m, \dots, S_n \rangle$.

El siguiente resultado se puede consultar en [5], el cual muestra la utilidad de las bases componentes.

Teorema 3.5. Si f es completa entonces son equivalentes los siguientes enunciados:

1. Si f admite una base componente débil.
2. Si f admite una base componente.
3. $\lim_{\leftarrow} f$ es desconexo.
4. Existe $n > 0$ tal que para cada $k \geq n$, $\star_{[i, k]} \Gamma(f_i)$ es desconexo.

Demostración. La equivalencia de (1), (3) y (4), se sigue de las definiciones y del Teorema 3.3. Claramente (2) implica (1). Supongamos $\sigma = \langle S'_m, \dots, S'_n \rangle$ es una base componente débil donde $S'_i \subset \Gamma(f_i)$ para cada $i \in [m, n]$, $\mathbf{p} \in \lim_{\leftarrow} f$, tal que

$$(p_{m-1}, \dots, p_n) \in \star_{i \in [m, n]} S'_i,$$

y para cada $i \in [m-1, n]$ existe un intervalo cerrado $[a_i, b_i] \subsetneq I_i$, que cumplen que $0, 1 \notin [a_m, b_m]$ y $0, 1 \notin [a_{n-1}, b_{n-1}]$ y además,

$$S'_i \subset [a_i, b_i] \times [a_{i-1}, b_{i-1}]$$

para cada $i \in [m, n]$. Sin pérdida de generalidad supongamos que ninguna subsección de σ es base componente débil. Mostraremos que existe una base componente $\langle S_k, \dots, S_l \rangle$ tal que $m \leq k < l \leq n$.

Supongamos $n = m + 1$.

Sea $[c, d] = \pi_H(S'_m)$ y $[c', d'] = \pi_V(S'_n)$. Si S'_m es un L -conjunto entonces S'_n es un T -conjunto. Se sigue que $c = a_m = \min(\pi_H(S'_m))$, de lo contrario $\Gamma(f_m)$ es disconexo, y $d' = b_m = \max(\pi_V(S'_n))$. De otra forma $\Gamma(f_n)$ es disconexo. Igualmente, si S'_m es un R -conjunto entonces S'_n es un B -conjunto, $d = b_m = \max(\pi_H(S'_m))$ y $c' = a_m = \min(\pi_V(S'_n))$.

Supongamos que S'_m es un L -conjunto. Sean S_m una componente de $S'_m \cap ([c', d'] \times I_{m-1})$ tal que $\pi_H(S_m) = [c', d']$ (podemos elegir la componente que contiene a (p_{m-1}, p_m) pero no es necesario) y S_n una componente de $S'_n \cap (I_n \times [c', d'])$ tal que $\pi_V(S_n) = [c', d']$. Claramente S_m es un L -conjunto y S_n un T -conjunto. Por la Proposición 3.1, $S_m \star S_n$ tiene una componente grande y por lo tanto $\langle S_m, S_n \rangle$ es una base componente. De igual forma si S'_m es un R -conjunto.

Supongamos $n > m + 1$.

Sean $D_m = S'_m$, $[c'_m, d'_m] = \pi_H(D_m)$ (así $c'_m = a_m$ y $d'_m \leq b_m$ si S'_m es un L -conjunto, y $c'_m \geq a_m$ y $d'_m = b_m$ si S'_m es un R -conjunto).

Si D_k y $[c'_k, d'_k] \subset I_k$ se han definido para $k \in [m, n - 2]$, entonces sea D_{k+1} la componente de $(I_{k+1} \times [c'_k, d'_k]) \cap S'_{k+1}$ que contiene a (p_{k+1}, p_k) , y sea

$$[c'_{k+1}, d'_{k+1}] = \pi_H(D_{k+1}).$$

- Si S'_{k+1} es un TL -conjunto entonces D_{k+1} es un TL -conjunto, un L -conjunto o T -conjunto.
- Si S'_{k+1} es un TR -conjunto entonces D_{k+1} es un TR -conjunto, un R -conjunto o T -conjunto.
- Si S'_{k+1} es un BL -conjunto entonces D_{k+1} es un BL -conjunto, un L -conjunto o B -conjunto.
- Si S'_{k+1} es un BR -conjunto entonces D_{k+1} es un BR -conjunto, un R -conjunto o B -conjunto.

Si D_{k+1} es un L -conjunto o un R -conjunto entonces puede mostrarse que

$$\langle D_{k+1}, S'_{k+2}, \dots, S'_n \rangle$$

es una base componente débil, y si D_{k+1} es un T -conjunto o un B -conjunto, entonces $\langle D_m, \dots, D_{k+1} \rangle$ es una base componente débil.

Sin pérdida de generalidad supongamos que para cada $i \in [m+1, n-1]$, D_i no es un L -conjunto, un R -conjunto, un T -conjunto, o un B -conjunto (de otra forma tomar la subsucesión mínima $\langle D_l, \dots, D_k \rangle$ que es un una base componente). Así para cada $i \in [m, n-1]$, $\pi_H(D_i) = [c'_i, d'_i]$ y para cada $i \in [m+1, n-1]$,

- $d'_{i-1} = \text{máx}(\pi_V(D_i))$, si D_i es TL -conjunto o TR -conjunto,
- $c'_{i-1} = \text{mín}(\pi_V(D_i))$, si D_i es BL -conjunto o BR -conjunto,
- $c'_i = \text{mín}(\pi_H(D_i)) = a_i$, si D_i es TL -conjunto o BL -conjunto, y
- $d'_i = \text{máx}(\pi_H(D_i)) = b_i$, si D_i es TR -conjunto o BR -conjunto.

Sea D_n una componente de $(I_n \times [c'_{n-1}, d'_{n-1}]) \cap S'_n$ que contiene a (p_n, p_{n-1}) . Claramente, si S'_n es un T -conjunto entonces D_n es un T -conjunto y $d'_{i-1} = \text{máx}(\pi_V(D_n))$, de otra forma es un B -conjunto y $c'_{n-1} = \text{mín}(\pi_V(D_n))$. Así

$$\langle D_m, \dots, D_n \rangle$$

es una base componente débil.

Si S'_n es un T -conjunto entonces S'_{n-1} es un TL -conjunto o BL -conjunto, y por lo tanto $c'_{n-1} = a_{n-1}$, y si S'_n es un B -conjunto entonces S'_{n-1} es un TR -conjunto o un BR -conjunto, y por lo tanto $d'_{n-1} = b_{n-1}$.

Sean S_n la componente de

$$D_n \cap (I_n \times [c'_{n-1}, d'_{n-1}])$$

que contienen a (p_n, p_{n-1}) y $[c_{n-1}, d_{n-1}] = \pi_V(S_n)$ (así $c_{n-1} \geq a_{n-1} = c'_{n-1}$ y $d_{n-1} = d'_{n-1} \leq b_{n-1}$ si S_n es un T -conjunto, y $c_{n-1} = c'_{n-1} \geq a_{n-1}$ y $d_{n-1} \leq d'_{n-1} = b_{n-1}$ si S_n es un B -conjunto).

Si S_k y $[c_{k-1}, d_{k-1}]$ han sido definidos para $k \in [m+1, n]$, entonces el conjunto S_{k-1} es componente de $([c_{k-1}, d_{k-1}] \times I_{k-2}) \cap D_{k-1}$ que tiene al punto (p_k, p_{k-1}) y sea $[c_{k-2}, d_{k-2}] = \pi_V(D_{k-1})$.

- Si D_{k-1} es TL -conjunto entonces S_{k-1} es un TL -conjunto, un T -conjunto o un L -conjunto.
- Si D_{k-1} es TR -conjunto entonces S_{k-1} es un TR -conjunto, un T -conjunto o un R -conjunto.
- Si D_{k-1} es BL -conjunto entonces S_{k-1} es un BL -conjunto, un B -conjunto o un L -conjunto.
- Si D_{k-1} es BR -conjunto entonces S_{k-1} es un BR -conjunto, un B -conjunto o un R -conjunto.

Si S_{k-1} es un L -conjunto o un R -conjunto entonces $\langle S_{k-1}, \dots, S_n \rangle$ es una base componente débil, y si S_{k-1} es un T -conjunto o un B -conjunto entonces

$$\langle D_m, \dots, D_{k-2}, S_{k-1} \rangle$$

es una base componente débil.

Sin pérdida de generalidad supongamos que para cada $i \in [m+1, n-1]$, S_i no es un L -conjunto, un R -conjunto, un T -conjunto o un B -conjunto. Así para cada $i \in [m+1, n-1]$, $\pi_H(D_i) = [c_i, d_i]$ (como $(p_i, p_{i-1}) \in D_i$), y para cada $i \in [m+1, n]$, $\pi_V(D_{i-1}) = [c_{i-1}, d_{i-1}]$.

Tenemos que S_m es una componente de $([c_m, d_m] \times I_{m-1}) \cap D_m$ que contiene al punto (p_m, p_{m-1}) . Si D_m es un L -conjunto entonces S_m es un L -conjunto, de otra forma S_m es un R -conjunto. En otro caso $\pi_H(S_m) = [c_m, d_m]$.

Así $\langle S_m, \dots, S_n \rangle$ es una base componente débil. Por construcción de

$$\langle S_m, \dots, S_n \rangle,$$

para cada $k \in [m, n-1]$, $\pi_H(S_k) = \pi_V(S_{k+1}) = [c_k, d_k]$. Por la Proposición 3.1, $\star_{i \in [m, n]} S_i$ tiene una componente grande C y por lo tanto $\pi_i(C) = S_i$ para cada $i \in [m, n]$.

Por el Teorema 3.4, $\langle S_m, \dots, S_n \rangle$ es una base componente. \square

Con las mismas ideas de la demostración del Teorema 3.5 se prueba el siguiente corolario.

Corolario 3.2. *Si f es completa y $\langle S'_{m'}, \dots, S'_{n'} \rangle$ es una base componente débil, entonces existe una base componente $\langle S_m, \dots, S_n \rangle$ tal que $m' \leq m < n \leq n'$ y para cada $i \in [m, n]$, $S_i \subseteq S'_i$.*

Corolario 3.3. *Sea f completa y $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$. Entonces $\star_{i \in [m, n]} \Gamma(f_i)$ es disconexo si y solo si la familia de funciones $\{f_m, \dots, f_n\}$ admite una base componente.*

Así podemos reformular las condiciones (1) y (2) de la Definición 3.8, de la siguiente manera.

(1)' para cada i , $m \leq i \leq n$, existe un S -conjunto $S_i \subset \Gamma(f_i)$, y

(2)' $\star_{i \in [m, n]} S_i \neq \emptyset$

Ejemplo 3.2. *El clásico ejemplo de una sucesión f que se da en [8] por T. W. Ingram, muestra que $\lim_{\leftarrow} f$ es disconexo. La sucesión f tiene una sola función de ligadura cuya gráfica se muestra en la Figura 3.4. Con el fin de simplificar el ejemplo, supongamos que $f_1 = f_2 = f$ y para cada $i > 2$, f_i es la identidad. Entonces, el punto $\{(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \dots)\}$ es una componente de $\lim_{\leftarrow} f$.*

Cualquier L -conjunto debe contener el punto $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$. Cualquier L -conjunto debe contener el punto $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ y no es único. El conjunto $\{(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})\}$ es en sí mismo un L -conjunto, y para cualquier x , $0 < x < \frac{1}{4}$ la línea recta que va de (x, x) a $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ es un L -conjunto. Similarmente cualquier T -conjunto debe contener $(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$ y no es único. Observemos que $\{(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}), (\frac{3}{4}, \frac{1}{4})\}$ es una base componente.

Al parecer si f es una sucesión completa y $\langle S_m, \dots, S_n \rangle$ es una base componente admitida por f (y por lo tanto $\lim_{\leftarrow} f$ es disconexo), entonces los dos conjuntos S_m y S_n son los responsables de la disconexidad. La función de los conjuntos entre ellos es asegurarse que ellos se alinean como se demuestra en el siguiente ejemplo.

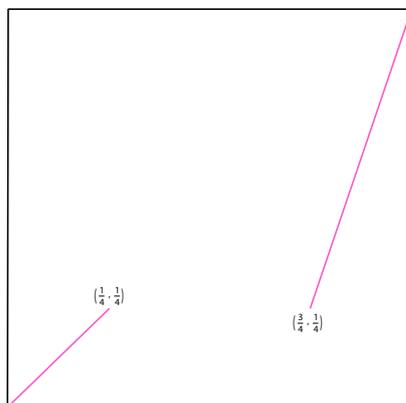


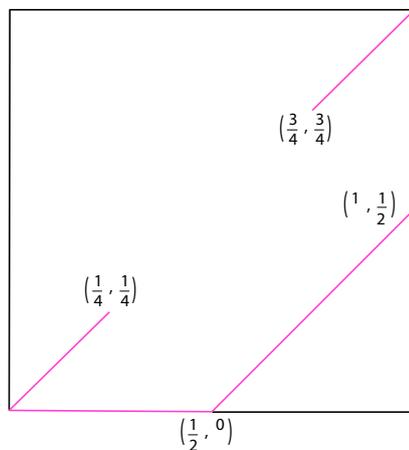
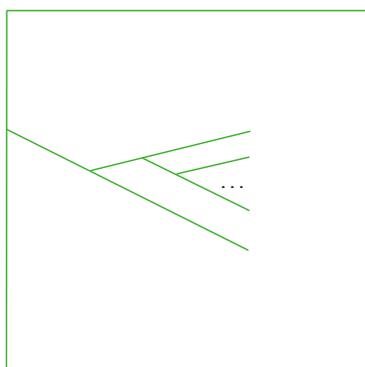
Figura 3.4: Ejemplo de Ingram

Ejemplo 3.3. Sea $f : I \rightarrow 2^I$ una función cuya gráfica se muestra en la Figura 3.5. Sea \mathbf{f} el sistema donde $f_1 = f_2 = f$ y para cada $i > 2$ es la función identidad.

Entonces el conjunto $S_1 = \{(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})\}$ es un L -conjunto, $S_2 = \{(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})\}$ es un TL -conjunto también es un BR -conjunto y $S_3 = \{(\frac{3}{4}, \frac{3}{4})\}$ es un T -conjunto. Como $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}) \in S_1 \star S_2 \star S_3$, se sigue que $\langle S_1, S_2, S_3 \rangle$ es una base componente, y $\{(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \dots)\}$ es una componente de $\lim_{\leftarrow} \mathbf{f}$.

Observemos que, en términos generales, el L -conjunto introduce la coordenada $\frac{1}{4}$ de I_0 y arroja la coordenada $\frac{1}{4}$ en I_1 . El TL -conjunto introduce la coordenada $\frac{1}{4}$ de I_1 y arroja la coordenada $\frac{3}{4}$ en I_2 . De esta forma la salida de L -conjunto transita a través de TL -conjunto en una salida que esté en línea con la entrada de $\frac{3}{4}$ de I_2 en T -conjunto, permitiendo que se produzca la desconexión.

Podemos observar que es posible tener una sucesión anidada de S -conjunto en una gráfica. La Figura 3.6 da un ejemplo de L -conjunto anidada. Todo punto p en la gráfica tal que $\Gamma(f) \setminus \{p\}$ tiene tres componentes que es la frontera de un L -conjunto.

Figura 3.5: Gráfica de f Figura 3.6: L -conjuntos anidados

3.2.1. Aplicaciones de Bases Componentes

Diremos que la función conjunto valuada $f : I \rightarrow 2^I$ es continua si para cada sucesión convergente $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tal que $x_i \rightarrow x$ entonces $f(x_i) \rightarrow f(x)$, con la métrica de Hausdorff.

Teorema 3.6. Si para cada $i \in \mathbb{N}$, $f_{i+1} : I_{i+1} \rightarrow 2^{I_i}$ es una función completa continua, entonces $\varprojlim \mathbf{f}$ es conexo, y para cada $n \in \mathbb{N}$, $\star_{i \in [1, n]} \Gamma(f_i)$ es conexo.

Demostración. Como cada f_i es continua y su gráfica no contiene un L -conjunto o un R -conjunto, el sistema no admite una base componente y $\lim_{\leftarrow} f$ es conexo y para cada $n > 0$, $\star_{i \in [1, n]} \Gamma(f_i)$ es conexo. \square

En [7], Ingram da un ejemplo con una función de ligadura completa f tal que $\star_{i \in [1, n]} \Gamma(f_i)$ es conexo y $\star_{i \in [1, n+1]} \Gamma(f_i)$ es desconexo. A continuación mostraremos un nuevo ejemplo con $\star_{i \in [1, n]} \Gamma(f_i)$ conexo y $\star_{i \in [1, n+1]} \Gamma(f_i)$ desconexo usando bases componentes, dado por S. Greenwood, J. Kennedy y M. Lockyer, en [5].

Ejemplo 3.4. Sea $n \in \mathbb{N}$. Sea $f : I \rightarrow 2^I$ una función cuya gráfica esta en la Figura 3.7, tal que $p_1 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, $p_{n+1} = (\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$, y para cada i , $1 < i \leq n$,

$$p_i = \left(\frac{1}{4} + \frac{i}{2n}, \frac{1}{4} + \frac{i-2}{2n} \right).$$

Cualquier L -conjunto en la gráfica de f debe contener el singular $\{(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})\}$ y no hay R -conjuntos. Cualquier T -conjunto de contener el singular $\{(\frac{3}{4}, \frac{3}{4})\}$ y no existen B -conjuntos.

Sea \mathbf{f} un sistema con una sola función de ligadura f y supongamos que $\langle S_1, \dots, S_n \rangle$ es una base componente. Debe ocurrir que S_1 es un L -conjunto, y $S_1 = \{(x, \frac{1}{4}) : b < x \leq \frac{1}{4}\}$ para algún $b \in (0, \frac{1}{4}]$. Se sigue que S_2 es un TL -conjunto en $\Gamma(f_2)$ que contiene al punto p_2 . Si $b < \frac{1}{4}$ entonces ningún TL -conjunto existe así $S_1 = \{(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})\}$ y $S_2 = \{p_2\}$. Si S_i ha sido definido para $1 < i < n-1$, S_i es un TL -conjunto en $G(f_i)$ y $S_i = \{p_i\}$, entonces S_{i+1} es el TL -conjunto $\{p_{i+1}\}$. Así, $S_{n-1} = \{p_{n-1}\} = \{(\frac{3}{4} - \frac{1}{2n}, \frac{3}{4} - \frac{3}{2n})\}$ es un TL -conjunto. Se sigue que S_n es un T -conjunto pero no existe un T -conjunto en $I_n \times \{\frac{3}{4} - \frac{1}{2n}\}$, lo cual es una contradicción. Así $\star_{[1, n]} \Gamma(f)$ es conexo. Hemos visto que $\{p_1\}$ es un L -conjunto y para cada i , $1 < i \leq n$, p_i es un TL -conjunto. Además, $\{p_{n+1}\}$ es un T -conjunto y $\langle p_1, \dots, p_{n+1} \rangle$ es una base componente, por lo que $\star_{[1, n+1]} \Gamma(f)$ sea conexo.

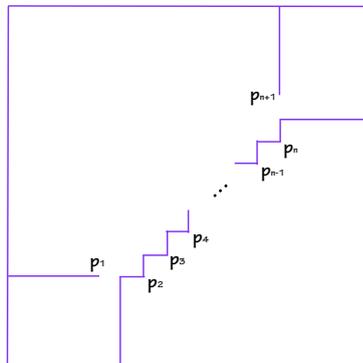


Figura 3.7: Gráfica de f

En el Ejemplo 2.9 se muestra que el límite inverso de una sucesión inversa $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es conexo pero el límite inverso es desconexo si las funciones de ligadura son las funciones inversas, a continuación presentamos otro ejemplo con las mismas condiciones.

Ejemplo 3.5. Las gráficas de las funciones f_1 y f_2 en la Figura 3.8, y para cada $i > 2$, f_i es la identidad. A continuación damos una prueba alternativa de que $\varprojlim f$ es conexo no implica que $\varprojlim f^{-1}$ es desconexo.

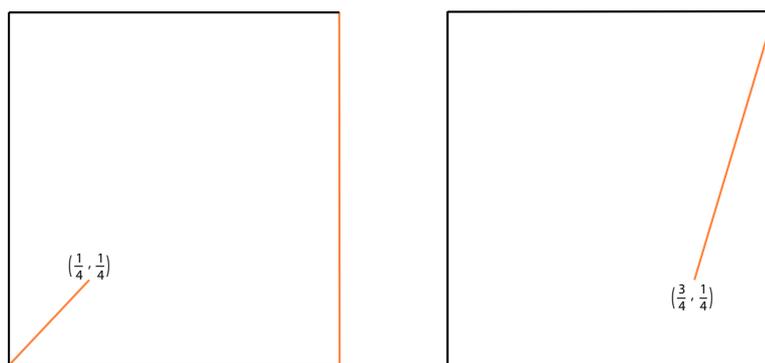


Figura 3.8: Gráficas de f_1 y f_2

Sea $S_1 = \{(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})\}$ y $S_2 = \{(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})\}$. Se puede observar que $\langle S_1, S_2 \rangle$ es una base componente y por lo tanto $\varprojlim \mathbf{f}$ es desconexo. Las gráficas de f_1^{-1} y f_2^{-1} se muestran en la Figura 3.9, se puede observar que no existen R -conjuntos en $\Gamma(f_1)$, y para cualquier L -conjunto en $\Gamma(f_1)$ debe tener al conjunto $\{(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})\}$ y es un subconjunto de $\{(x, x) : 0 < x \leq \frac{1}{4}\}$. De manera similar no existen B -conjuntos en f_2^{-1} y cualquier T -conjunto debe contener al singular $\{(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})\}$ y es un subconjunto de $\{(x, \frac{x}{3} + \frac{2}{3}) : \frac{1}{4} \leq x < 1\}$. Ahora

$$\left\{ (x, x) : 0 < x \leq \frac{1}{4} \right\} \star \left\{ (x, \frac{x}{3} + \frac{2}{3}) : \frac{1}{4} \leq x < 1 \right\} = \emptyset$$

por lo tanto no existe base componente y $\varprojlim \mathbf{f}^{-1}$ es conexo.

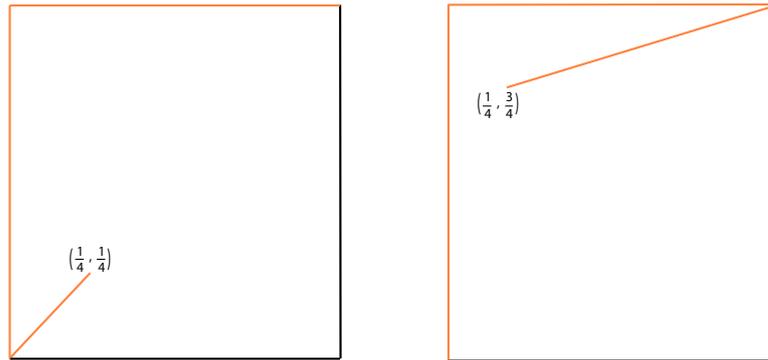


Figura 3.9: $G(f_1^{-1})$ y $G(f_2^{-1})$

Daremos un segundo ejemplo. otra vez utilizamos la caracterización desconexidad por la existencia de una base componente. Solo que en este ejemplo las funciones inversas no admiten una base componente porque sus gráficas no tienen L -conjuntos o R -conjuntos.

Ejemplo 3.6. Sean f_1 y f_2 funciones cuyas gráficas se muestran en la Figura 3.10, y para cada $i > 2$, f_i es la función identidad. Sea $S_1 = \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$ y $S_2 = \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$. Se puede observar que $\langle S_1, S_2 \rangle$ es una base componente y por lo tanto $\varprojlim \mathbf{f}$ es desconexo.

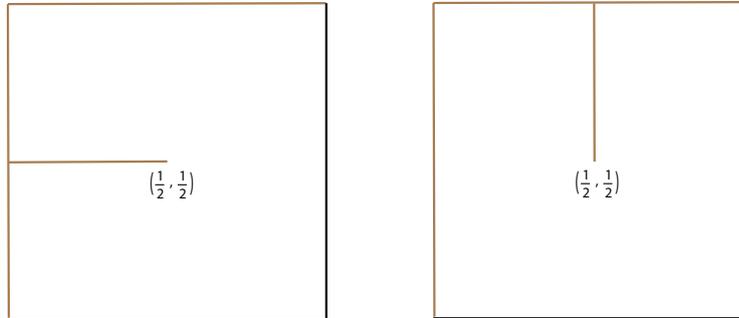


Figura 3.10: $\Gamma(f_1)$ y $\Gamma(f_2)$

Las gráficas de f_1^{-1} y f_2^{-1} se muestran en la Figura 3.11, se puede observar que no existen L -conjuntos o R -conjuntos en $\Gamma(f_1)$ y por lo tanto no existe una base componente. Así $\lim_{\leftarrow} f^{-1}$ es conexo.

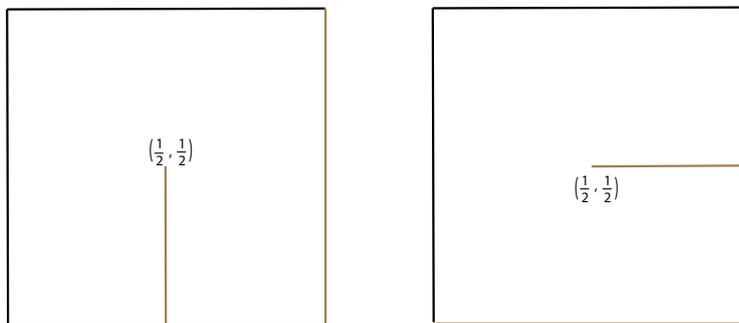


Figura 3.11: $\Gamma(f_1^{-1})$ y $\Gamma(f_2^{-1})$

Para la prueba del Teorma 3.7, mencionaremos primero un lema que muestra la relación entre los S -conjuntos en la gráfica de la función $f : I \rightarrow 2^I$ y los S -conjuntos en la gráfica de f^{-1} .

Lema 3.1. Si $f : I \rightarrow 2^I$ es completa, C es un S -conjunto en $\Gamma(f)$. Y

$$C^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in C\}.$$

Entonces se cumplen los siguientes enunciados.

1. Si C es un L -conjunto entonces C^{-1} es un B -conjunto.
2. Si C es un R -conjunto entonces C^{-1} es un T -conjunto.
3. Si C es un T -conjunto entonces C^{-1} es un R -conjunto.
4. Si C es un B -conjunto entonces C^{-1} es un L -conjunto.
5. Si C es un TL -conjunto entonces C^{-1} es un BR -conjunto.
6. Si C es un TR -conjunto entonces C^{-1} es un TR -conjunto.
7. Si C es un BL -conjunto entonces C^{-1} es un BL -conjunto.
8. Si C es un BR -conjunto entonces C^{-1} es un TL -conjunto.

Teorema 3.7. Un límite inverso con una sola función de ligadura completa f es conexo si y solo si el límite inverso con una sola función de ligadura f^{-1} es conexo.

Demostración. Supongamos $\lim_{\leftarrow} \mathbf{f}$ es desconexo. Entonces $\star_{i \in [1, n]} \Gamma(f_i)$ es desconexo para alguna n . Supongamos que n es mínimo para el cual $\star_{i \in [1, n]} \Gamma(f_i)$ es desconexo. Como $f_i = f$ para cada i existe una base componente $\langle S_1, \dots, S_n \rangle$ donde $S_i \subset \Gamma(f_i)$ para cada $i \in [1, n]$. Se sigue del Lema 3.1 que $\langle S_1^{-1}, \dots, S_n^{-1} \rangle$, donde $S_{n-i+1}^{-1} \subset \Gamma(f_i^{-1})$ para cada $i \in [1, n]$ es una base componente del sistema de \mathbf{f}^{-1} .

El regreso se cumple pues $(f^{-1})^{-1} = f$. □

La prueba del siguiente teorema es similar a la del Teorema 3.7.

Teorema 3.8. Supongamos \mathbf{f} una sucesión completa. Entonces $\star_{i \in [1, n]} \Gamma(f_i)$ es conexo si y solo si $\star_{i \in [1, n]} \Gamma(g_i)$ es conexo donde $g_i = f_{n-i+1}^{-1}$ para cada $i < n$.

3.2.2. Componentes grandes y chicas

Banič y Kennedy en [1], mostraron que para toda sucesión completa f , $\lim_{\leftarrow} f$ tiene al menos una componente C tal que para cada $i \in \mathbb{N}$, $\pi_{i+1,i}(C) = \Gamma(f_{i+1})$. En esta sección requerimos tener presente el Corolario 3.1, la Definición 3.4 y la Proposición 3.1

Notemos que si f es una sucesión completa y C una componente chica de $\lim_{\leftarrow} f$, entonces no necesariamente se cumple que C es débilmente capturado por una base componente, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.7. Sea f_1 una función cuya gráfica se muestra en la primera parte de la Figura 3.12, y f_2 es la gráfica de la segunda parte de la Figura 3.12, que contiene una sucesión de segmentos de línea inclinados que disminuyen su tamaño y su límite es el punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Para cada $i > 2$, f_i es la función identidad.

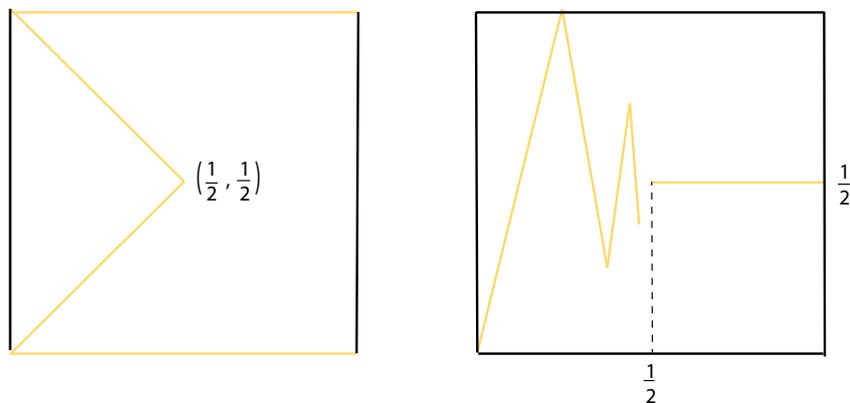


Figura 3.12: $\Gamma(f_1)$ y $\Gamma(f_2)$

Consideremos el conjunto

$$C = \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, x, x, \dots \right) : x \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \right\}.$$

Si $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ tenemos

$$U = \left(\left(\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon \right) \times \left(\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon \right) \times \left(\frac{1}{2} - \varepsilon, 1 \right] \times \prod_{i>2} I_i \right) \cap \lim_{\leftarrow} \mathbf{f}$$

el cual es una vecindad abierta de C en $\lim_{\leftarrow} \mathbf{f}$. Observemos que U es una colección de componentes, donde una de ellas es C , y cada una de los demás componentes es un subconjunto de $I_0 \times [0, \frac{1}{2}] \times \prod_{i>1} I_i$.

Así, C componente de $\lim_{\leftarrow} \mathbf{f}$. Además, veremos que C no es capturada por una base componente. Si $\langle S_1, \dots, S_n \rangle$ es una base componente que captura a C , como la función identidad no contiene un T -conjunto o un B -conjunto, debe ser el caso en que $n = 2$, $S_1 = \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\} \subset G(f_1)$ y $S_2 = [\frac{1}{2}, 1] \times \{\frac{1}{2}\}$. Así, S_1 es un L -conjunto pero S_2 no es un T -conjunto, esto es una contradicción.

Teorema 3.9. Para toda sucesión completa \mathbf{f} , si $\lim_{\leftarrow} \mathbf{f}$ tiene una componente chica C que no es capturada por una base componente, entonces la colección de bases componentes que la capturan tiene un punto límite en C .

Demostración. Sea \mathcal{C} la colección de componentes que capturan a la componente pequeña C y supongamos $\overline{\bigcup \mathcal{C}} \cap C = \emptyset$. Entonces existen abiertos U, V subconjuntos de $\prod_{i \in \mathbb{N}} I_i$, tales que $C \subset U \subset \overline{U} \subset V$, y $V \cap \bigcup \mathcal{C} = \emptyset$.

Para cada $i \in \mathbb{N}$, sea $X_i = [a_i, b_i] = \pi_{\overline{U}}$. Como U es abierto, $a_i < b_i$ para cada i . Ahora, para cada $i > 0$ sea C_i la componente de $\pi_{i,i-1}(\overline{U}) \cap \Gamma(f_i)$ que contiene $\pi_{i,i-1}(C)$, y sea $G_i \subseteq I_i \times I_{i-1}$ el conjunto $C_i \cup B$, donde

$$B = (\{a_i, b_i\} \times X_{i-1}) \cup (X_i \times \{a_{i-1}, b_{i-1}\}).$$

Como cada gráfica $\Gamma(f_i)$ es completa, cada Γ_i es conexo. Para $i > 0$, sea $g_i : X_i \rightarrow 2^{X_{i-1}}$ la función cuya gráfica es Γ_i . Por definición de \overline{U} se sigue que el sistema \mathbf{g} es completo. Si \mathbf{g} admite una base componente $\langle S_m, \dots, S_n \rangle$ donde para cada $i \in [m, n]$, $S_i \subset \Gamma_i$, entonces para cada $i \in [m, n]$, $S_i \subseteq \Gamma_i$, y por lo tanto $\langle S_m, \dots, S_n \rangle$ es una base componente admitida por \mathbf{f} , esto es una contradicción. Así, \mathbf{g} no admite una base componente y por lo tanto $\lim_{\leftarrow} \mathbf{g}$ es conexo.

Como cada g es completa existe i tal que $\pi_{i,i-1}(U) \neq \Gamma(f_i)$, de esta manera existe un punto $(y_i, y_{i-1}) \in C_i \setminus (\pi_{i,i-1}(C) \cup B)$ y por lo que existe un punto

$\mathbf{x} \in \varprojlim \mathbf{g}$ tal que $x_i = y_i$ y $x_{i-1} = y_{i-1}$. Así, $C \neq \varprojlim \mathbf{g}$, pero $C \subset \varprojlim \mathbf{g}$ por lo que $\varprojlim \mathbf{g}$ es desconexo y esto es una contradicción. Por lo tanto $\overline{\bigcup C} \cap C \neq \emptyset$ \square

Teorema 3.10. *Para toda sucesión completa \mathbf{f} , $\varprojlim \mathbf{f}$ tiene exactamente una componente grande.*

Demostración. Se muestra en [1], mostraron que para toda sucesión completa \mathbf{f} , $\varprojlim \mathbf{f}$ tiene al menos una componente larga. Supongamos que X y Y son componentes grandes distintas de $\varprojlim \mathbf{f}$. Entonces existe $n > 0$ tal que

$$\pi_{[0,n]}(X) \cap \pi_{[0,n]}(Y) = \emptyset,$$

de otra forma

$$\left(\pi_{[0,n]}(X) \times \prod_{i>n} I_i \right) \cap \left(\pi_{[0,n]}(Y) \times \prod_{i>n} I_i \right) \neq \emptyset,$$

$$X = \bigcap \left(\pi_{[0,n]}(X) \times \prod_{i>n} I_i \right),$$

$$Y = \bigcap \left(\pi_{[0,n]}(Y) \times \prod_{i>n} I_i \right)$$

y por lo tanto $X \cap Y \neq \emptyset$, y esto es una contradicción.

Supongamos que existe una sucesión completa cuyo límite inverso tiene mas de una componente grande. Sea n el mínimo valor por el cual existe una sucesión completa \mathbf{g} tal que $\varprojlim \mathbf{g}$ tiene distintas componentes largas X y Y y

$$\pi_{[0,n]}(X) \cap \pi_{[0,n]}(Y) = \emptyset.$$

Por lo tanto, para toda sucesión \mathbf{g} , $\star_{i \in [1, n-1]} \Gamma(g_i)$ tiene solo una componente grande. Como $\Gamma(g_1)$ es conexo, $n > 1$.

Sea \mathbf{f} es una sucesión completa tal que $\star_{i \in [1, n]} \Gamma(f_i)$ tiene mas de una componente grande. Sea \mathcal{A} el conjunto de las componentes de

$$\{(x_0, \dots, x_{n-1}) \in \star_{i \in [1, n-1]} \Gamma(f_i) : x_{n-1} = 0\},$$

y \mathcal{B} las componentes de

$$\{(x_{n-1}, x_n) \in \Gamma(f_i) : x_{n-1} = 0\}.$$

Entonces, para cada $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{B}$, $A \star B$ es conexo. Obsérvese que $A \star B$ es homeomorfo a $A \times B$ y B es un intervalo.

Supongamos C y D son componentes grandes de $\star_{i \in [1, n]} \Gamma(f_i)$, $C \neq D$. Por la minimalidad de n , $\star_{i \in [1, n-1]} \Gamma(f_i)$ tiene una componente grande L . Como $\pi_{[0, n-1]}(C)$ y $\pi_{[0, n-1]}(D)$ son conexos y para cada $i \in [1, n-1]$, $\pi_{i, i-1}(C) = \pi_{i, i-1}(D) = \Gamma(f_i)$, la componente que está contenida en $\pi_{i, i-1}(C)$ es grande y la componente que está contenida en $\pi_{i, i-1}(D)$ es grande. Se sigue que

$$\pi_{[0, n-1]}(C) = \pi_{[0, n-1]}(D) = L.$$

Sea $R \subseteq \Gamma(f_n)$ un subcontinuo irreducible que interseca a cada uno de los conjuntos $I_n \times \{0\}$ y $I_n \times \{1\}$. Observemos que $\pi_{n-1}(R) = I_{n-1}$.

Como R es irreducible interseca un elemento B de \mathcal{B} .

Sea $G = \star_{i \in [1, n-1]} \Gamma(f_i) \star R$. Si $\pi_n(R)$ es un conjunto singular $\{a\}$, entonces

$$G = \star_{i \in [1, n-1]} G(f_i) \times \{a\}$$

el cual es homeomorfo a $\star_{i \in [1, n-1]} \Gamma(f_i)$ y por lo tanto tiene una sola componente grande. Si $[c, d] = \pi_n(R)$ y $c < d$, entonces R es la gráfica de una función completa de $[c, d]$ a I_{n-1} .

Supongamos K_1 y K_2 son componentes grandes de G , $K_1 \neq K_2$ (recorremos la definición de tal componente, en este caso $\pi_{i, i-1}(K_1) = \Gamma(f_i)$ para cada $i \in [1, n-1]$ y $\pi_{n, n-1} = R$, y de manera similar para K_2). Se puede observar $G \subset \star_{i \in [1, n]} G(f_i)$, así $\pi_{[0, n-1]}(K_1)$ y $\pi_{[0, n-1]}(K_2)$ son componentes grandes de $\star_{i \in [1, n-1]} \Gamma(f_i)$ y por lo tanto

$$\pi_{[0, n-1]}(K_1) = \pi_{[0, n-1]}(K_2) = L.$$

Así, si $(x_0, \dots, x_n) \in K_1$ entonces existe $(y_0, \dots, y_n) \in K_2$ y son tales que $x_i = y_i$ para cada $i < n$, y existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $(x_0, \dots, x_{n-1}) \in A$. Como

$K_1 \cap K_2 = \emptyset$, $x_n \neq y_n$. Como $(x_n, x_{n-1}) \in B$ y $(y_n, y_{n-1}) \in B$. Se tiene que $(x_0, \dots, x_n), (y_0, \dots, y_n) \in A \star B$ y $A \star B$ es conexo, esto es una contradicción. Así, existe una única componente grande K de G y $\pi_{[0, n-1]}(K) = L$.

Como C es grande, existe $(x_0, \dots, x_n) \in C$ tal que $(x_n, x_{n-1}) \in B$. Sea $A \in \mathcal{A}$ tal que $(x_0, \dots, x_{n-1}) \in A$. Como $(x_0, \dots, x_{n-1}) \in L$ existe $(y_0, \dots, y_n) \in K$ tal que $x_i = y_i$ para cada $i < n$ y $(y_n, y_{n-1}) \in B$. Así, $(x_0, \dots, x_n), (y_0, \dots, y_n) \in A \star B$ y como $A \star B$ es conexo, $K \subseteq C$.

Con un argumento similar $K \subset D$, esto es una contradicción.

Por lo tanto $\star_{i \in [1, n]} \Gamma(f_i)$ tiene una sola componente grande

□

Corolario 3.4. Si $\lim_{\leftarrow} f$ es desconexo entonces este tiene una componente chica.

3.2.3. Número de componentes de un límite inverso

En esta sección mostramos resultados relacionados con la cardinalidad de las componentes de un límite inverso. Consideremos el Problema 6.6 de [8], que dice:

Problema 1. ¿Qué sucede con los límites inversos con una sola función de ligadura cuya gráfica es la unión de dos funciones sin puntos de coincidencia?

En [5] da una respuesta en relación a la conexidad dando a conocer el número de componentes del límite inverso.

Teorema 3.11. Un límite inverso con una sola función de ligadura cuya gráfica es la unión de dos funciones sin un punto de coincidencia tiene \mathfrak{c} componentes.

Demostración. Supongamos que $g, h : [0, 1] \rightarrow 2^{[0, 1]}$ son funciones continuas tales que $\Gamma(g) \cap \Gamma(h) = \emptyset$, y $F : [0, 1] \rightarrow 2^{[0, 1]}$ es usc cuya gráfica es $\Gamma(g) \cup \Gamma(h)$.

Sea \mathcal{F} la colección de todas las sucesiones $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tales que para cada i $f_i = g$ o bien $f_i = h$. Entonces

- $|\mathcal{F}| = \mathfrak{c}$

- Si $f \in \mathcal{F}$ entonces $\lim_{\leftarrow} f$ es conexo y una componente de $\lim_{\leftarrow} F$.

Se sigue que $\lim_{\leftarrow} F$ tiene \mathfrak{c} componentes.

□

Tal vez el ejemplo mas conocido con relación al Teorema 3.11, es una sola función de ligadura f donde $\Gamma(f) = I \times \{0, 1\}$ como se muestra en la Figura 3.13. En este ejemplo bien se sabe que $\lim_{\leftarrow} f$ es el conjunto de Cantor.

El límite inverso y los productos de Mahavier generados por una función de ligadura completa f pueden tener \mathfrak{c} componentes. Daremos otro ejemplo.

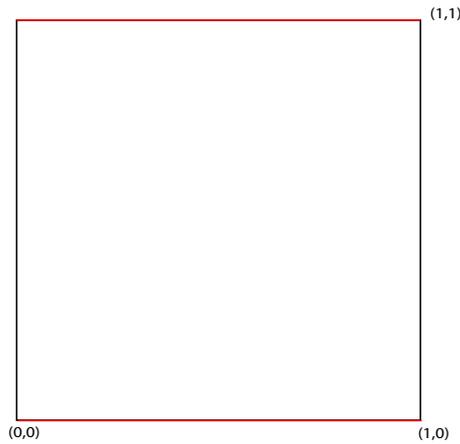


Figura 3.13: Gráfica de g

Ejemplo 3.8. Sea $C' \subset [0, 1]$ el conjunto de Cantor ternario y sea

$$C = \left\{ \frac{x+1}{3} : x \in C' \right\}.$$

Sea $g : [0, 1] \rightarrow 2^{[0,1]}$ una función cuya gráfica se muestra en la Figura 3.13, y contiene \mathfrak{c} líneas horizontales y \mathfrak{c} líneas verticales, cada colección está posicionada de acuerdo al conjunto C como es indicado.

Para cada $i > 0$, cada sucesión $\{A_i, B_{i+1}\}$ donde

$$A_i \in \left\{ \left\{ \left(\frac{1}{2}, c \right) \right\} \subset I_i \times I_{i-1} : c \in C \right\}$$

y

$$B_{i+1} \in \left\{ \left\{ \left(c, \frac{1}{2} \right) \right\} \subset I_{i+1} \times I_i : c \in C \right\}$$

es una base componente. Si

$$(x_0, x_1, x_2), (y_0, y_1, y_2) \in \Gamma(g) \times \Gamma(g)$$

y cada triada de la forma $(c, \frac{1}{2}, d)$ donde $c, d \in C$ entonces

$$(x_0, x_1, x_2) \text{ y } (y_0, y_1, y_2)$$

están solo en la misma componente de $\Gamma(g) \times \Gamma(g)$ si $(x_0, x_1, x_2) = (y_0, y_1, y_2)$. Así, $\Gamma(g) \star \Gamma(g)$ tiene c componentes y por lo tanto cualquier Producto de Mahavier, con g como única función de ligadura, tiene c componentes.

En el ejemplo anterior, el límite inverso tiene c componentes, y así lo hacen cada uno de los productos de Mahavier de g . Veamos que es posible que un límite inverso con una sola función de ligadura completa tenga c componentes, pero todo producto Mahavier generado por la función tiene solamente una cantidad finita de componentes.

Ejemplo 3.9. Para cada $i > 0$ sea $f_i : [0, 1] \rightarrow 2^{[0,1]}$ cuya gráfica se muestra en la Figura 3.14. Para cada $i > 0$ los singulares $A_i = \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})\}$ y $B_i = \{(\frac{1}{2}, \frac{2}{3})\}$ son L -conjuntos en $\Gamma(f_i)$ y los singulares $C_i = \{(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})\}$ y $D_i = \{(\frac{2}{3}, \frac{1}{2})\}$ son T -conjuntos en $\Gamma(f_i)$. Así, para cada $i \in \mathbb{N}$ y cada uno de los conjuntos

$$\langle A_i, C_{i+1} \rangle, \langle B_i, C_{i+1} \rangle, \langle A_i, D_{i+1} \rangle \text{ y } \langle B_i, D_{i+1} \rangle$$

es una base componente. Para cada $i \in \mathbb{N}$ y los puntos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \varprojlim \mathbf{f}$ y cada una de las triadas (x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) y (y_i, y_{i+1}, y_{i+2}) es alguna de las siguientes triadas

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) \text{ o } \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$$

entonces \mathbf{x}, \mathbf{y} están en la misma componente de $\varprojlim \mathbf{f}$ si

$$(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) = (y_i, y_{i+1}, y_{i+2}).$$

Para cualquier $\mathbf{x} \in \varprojlim \mathbf{f}$, cada sucesión cuadruple de \mathbf{x} puede ser de la forma

$(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \frac{1}{2})$ donde (x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) es alguno de los siguientes valores

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) \text{ o } \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right).$$

Existen c de tales puntos y cualesquiera dos de ellos debe diferir sobre alguna triada que corresponde a una de las 4. Así que existen c componentes.

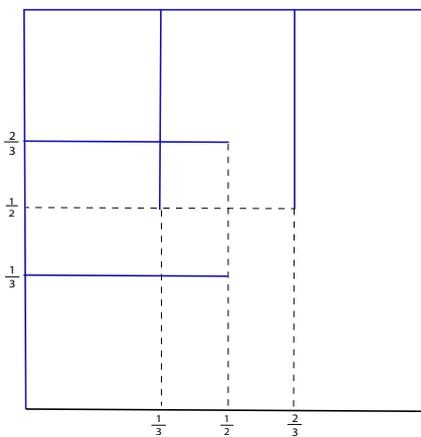


Figura 3.14: El límite inverso tiene c componentes

Teorema 3.12. Si f es una sucesión completa, $k > 1$ y para cada $i \leq k$, $\sigma_i = \langle S_{m_i}^i, \dots, S_{n_i}^i \rangle$ es una base componente tal que $S_{j_i}^i \subset \Gamma(f_{j_i})$ y $\sigma_i \neq \sigma_j$, si $i \neq j$, entonces existen $k + 1$ componentes pequeñas disjuntas por pares C_0, C_1, \dots, C_k tales que para cada i , $\pi_{[m_i-1, n_i]}(C_i)$ es una componente grande de $S_{m_i}^i \star \dots \star S_{n_i}^i$.

Demostración. Para cada $i < k$, sea D_i una componente de $\lim_{\leftarrow} f$ tal que

$$\pi_{[m_i-1, n_i]}(D_i)$$

es una componente grande de $\star_{i \in [m_i, n_i]} S_i$. Supongamos que para algunos i, j , $m_i \leq m_j \leq n_i \leq n_j$ y $D_i = D_j$. Entonces para cada $l \in [m_j, n_i]$, $S_l^i = S_l^j$. Así $S_{m_j}^i = S_{m_j}^j$ es un L -conjunto o un R -conjunto, y $S_{n_i}^i = S_{n_i}^j$ es un T -conjunto o B -conjunto. Si $m_i < m_j$ entonces $\langle S_{m_j}^i, \dots, S_{n_i}^i \rangle$ es una subsucesión propia de σ_i que es una base componente. Si $n_i < n_j$ entonces $\langle S_{m_j}^j, \dots, S_{n_i}^j \rangle$ es una

subsucesión propia de σ_j que es una base componente. En otro caso tenemos una contradicción. Así, si $m_i \leq m_j \leq n_i \leq n_j$ entonces $D_i \neq D_j$.

El argumento es similar si $m_j \leq m_i \leq n_i \leq n_j$ o $m_i \leq m_j \leq n_j \leq n_i$. Por lo tanto, si $D_i = D_j$ entonces $n_i \leq m_j$ o $n_j \leq m_i$.

Supongamos que el orden es para cada $i < k$, $n_i \leq m_{i+1}$.

Para cada $j < k$, como f_{m_j} es completa y $\pi_{m_j, m_{j-1}}(D_j)$ es L -conjunto o R -conjunto, se sigue que existe una componente E_j de $(\pi_{m_j}(D_j) \times I_{j-1}) \cap \Gamma(f_{m_j})$ tal que E_j es L -conjunto o un R -conjunto,

$$E_j \cap \pi_{m_j, m_{j-1}}(D_j) = \emptyset,$$

es decir, $E_j \cap S_{m_j}^j = \emptyset$ y $\pi_H(E_j) = \pi_H(S_{m_j}^j)$. Como \mathbf{f} es completa, existen $\mathbf{x} \in D_j$ y $\mathbf{y} \in \varprojlim \mathbf{f}$ tales que $y_{m_j} = x_{m_j}$ y $(y_{m_j}, y_{m_j-1}) \in E_j$. Así,

$$P = (y_0, \dots, y_{m_j-1}, x_{m_j}, x_{m_j+1}, \dots) \in \varprojlim \mathbf{f}$$

y $P \notin D_j$.

Ahora mostraremos que si $i > j$ entonces existe una componente K de

$$\pi_{[m_i-1, n_i]}^{-1}(\star_{l \in [m_i, n_i]}(S_l^i))$$

tal que

1. $\pi_{[m_i-1, n_i]}(K)$ es una componente grande de $\star_{l \in [m_i, n_i]}(S_l^i)$, y
2. $\pi_{m_j, m_{j-1}}(K) = E_j$ y por lo tanto K es disjunto de D_j .

Para cada $l \geq m_j$ sea $X_l = \pi_l(D_i)$. Para toda $l > m_j$, sea $\Gamma_l = \pi_{l, l-1}(D_l)$. Así $\pi_{[m_j, \infty)}(D_i)$ es una componente grande de $\star_{l > m_j} \Gamma_l$. Sea $G_{m_j} = E_j$. Si $l \leq m_j$, y Γ_l, X_l ya han sido definidas, sea $X_{l-1} = \pi_V(\Gamma_l)$ y cada componente Γ_{l-1} de $X_{l-1} \times I_{l-2}$ tal que $\pi_H(E_{l-1}) = X_{l-1}$. Como cada Γ_l puede ser considerado como la gráfica de una función usc sobreyectiva de X_l a $2^{X_{l-1}}$, por la Proposición 3.2, $\star_{i > 0} \Gamma_i$ tiene una componente grande K , y K es componente de $\varprojlim \mathbf{f}$ que satisface (1) y (2).

Sea $C_0 = D_0$. Si $D_1 \cap C_0 = \emptyset$ entonces $D_1 = C_1$. Si $D_1 \cap D_0 \neq \emptyset$ entonces sea C_1 una componenete de $\varprojlim \mathbf{f}$ tal que

- $\pi_{m_0, m_0-1}(C_1) = E_0$, y
- $\pi_{[m_1-1, n_1]}(C_1)$ es una componenete grande de $\star_{l \in [m_1, n_1]} S_l^1$.

Tal componente existe pues $D_0 \neq D_1$, y por lo tanto $m_0 < n_0 \leq m_1$. Así, C_1 es una componente pequeña, $\pi_{[m_1-1, m_1]}(C_1)$ es una componente grande de $\star_{l \in [m_1, n_1]} S_l^1$ y $C_1 \cap C_0 = \emptyset$.

Supongamos $i \in [0, k-1]$ y

- para cada $j \leq i$ existe una componente pequeña C_j tal que $\pi_{[m_j-1, n_j]}(C_j)$ es una componente grande de $\star_{l \in [m_j, n_j]} S_l^j$, y
- los elementos de la colección $\{C_j : j \leq i\}$ son ajenos por pares.

Si para cada $l \leq i$, $D_{i+1} \neq C_l$ sea $C_{i+1} = D_{i+1}$, de otra forma sea $A_{i+1, i+1} = D_{i+1}$. Supongamos $j \leq i+1$, $A_{j+1, j}$ han sido definidas y si $j \leq i$ entonces

$$\pi_{[m_{j+1}-1, \infty)}(A_{i+1, j}) = \pi_{[m_{j+1}, \infty)}(A_{i+1, j+1}),$$

y por lo tanto $\pi_{[m_{j+1}-1, \infty)}(A_{i+1, j})$ es una componente grande de $\star_{l \in [m_{i+1}, n_{i+1}]} S_l^{i+1}$. Si $A_{i+1, j} \neq D_{j-1}$, entonces sea $A_{i+1, j-1} = A_{i+1, j}$, de otra forma hacemos $A_{i+1, j-1}$ una componente de $\lim_{\leftarrow} f$ tal que

- $\pi_{[m_j-1, \infty)}(A_{i+1, j-1}) = \pi_{[m_j-1, \infty)}(A_{i+1, j})$ y
- $\pi_{m_j-1, m_j-1-1}(A_{i+1, j-1}) = E_{j-1}$.

Para demostrar que $A_{i+1, j-1}$ existe es equivalente en demostrar la existencia de una componente K que satisface (1) y (2), como $m_{j-1} < m_j$.

Por lo tanto, para todo $l \in [j, i]$. $A_{i+1, j-1} \cap C_l = \emptyset$ y

$$\pi_{[m_j, \infty)}(A_{i+1, j-1}) = \pi_{[m_j, \infty)}(A_{i+1, j}).$$

Sea $C_{i+1} = A_{i+1, 0}$. Así, por inducción obtenemos una colección de componentes pequeñas $\{C_j : j \leq k\}$ que son ajenos por pares. \square

Teorema 3.13. *Sea f una sucesión completa con una sola función de ligadura f . Si $\lim_{\leftarrow} f$ es disconexo entonces tiene una cantidad infinita de componentes.*

Demostración. Como $\varprojlim \mathbf{f}$ es desconexo el sistema admite una base componente $\langle S_0, \dots, S_n \rangle$. Como f es una sola función de ligadura la base es repartida sobre cualquier sucesión de $n + 1$ funciones, es decir, existe una base con exactamente los mismos S -conjuntos en $\Gamma(f)$, esto ocurre sobre cada sucesión de $n + 1$ funciones. Por lo tanto, existe una cantidad infinita de bases componente y el resultado se sigue del Teorema 3.12. \square

El teorema anterior requiere de una sola función de ligadura. No siempre es cierto cuando se tiene más de una función de ligadura. El ejemplo clásico que muestra esto es el dado por Ingram en [8, Ejemplo 2.1] y que describimos en el Ejemplo 3.2.

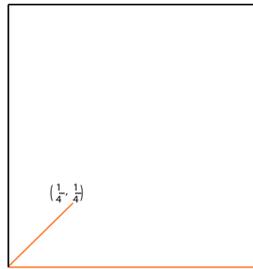
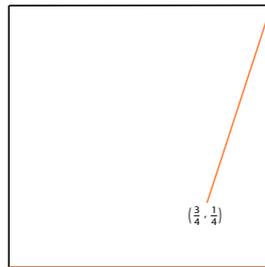
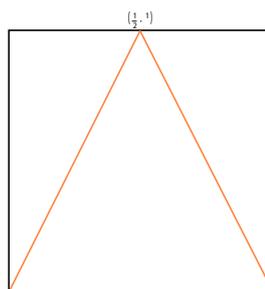
Además, recordemos la definición de descomposición de una gráfica en subgráficas fibra-conexa.

Teorema 3.14. *Si cada gráfica tiene una descomposición en subgráficas fibra-conexa entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, $\star_{i \in [1, n]} \Gamma(f_i)$ tiene un número finito de componentes.*

Demostración. Las gráficas que tienen una descomposición finita en subgráficas fibras-conexas tienen solo una cantidad finita de S -conjuntos, y por lo tanto para toda $n \in \mathbb{N}$, $\star_{i \in [1, n]} \Gamma(f_i)$ tiene solo una cantidad finita de bases componente. Así que por Teorema 3.9 $\star_{i \in [1, n]} \Gamma(f_i)$ tiene solo componentes chicas y para cualquier $n \in \mathbb{N}$, son capturados por bases componentes y por el Teorema 3.10 existe una sola componente grande. Así $\star_{i \in [1, n]} \Gamma(f_i)$ tiene una cantidad finita de componentes. \square

Finalizamos nuestro trabajo en el siguiente ejemplo que muestra una sucesión completa \mathbf{f} que tiene un número finito de bases componente, pero $\varprojlim \mathbf{f}$ tiene c componentes.

Ejemplo 3.10. *Sean f_1 y f_2 dos funciones cuya gráfica se muestra en la Figura 3.15 y Figura 3.16 respectivamente y para cada $i > 2$ sea f_i cuya gráfica se muestra en la Figura 3.17. Observese que $\langle \{(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})\}, \{(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})\} \rangle$ es base componente. Para cualquier $\mathbf{x} \in \varprojlim \mathbf{f}$ tal que $x_0 = x_1 = \frac{1}{4}$ y $x_2 = \frac{3}{4}$, el singular $\{\mathbf{x}\}$ es una componente de $\varprojlim \mathbf{f}$ y hay c componentes.*

Figura 3.15: $\Gamma(f_0)$ Figura 3.16: $\Gamma(f_1)$ Figura 3.17: $\Gamma(f_2)$

Bibliografía

- Banič, I. and Kennedy, J. (2015). Inverse limits with bonding functions whose graphs are arcs. *Topology Appl.*, 190:9–21.
- Goodman, J. E., Pach, J., and Yap, C. K. (1989). Mountain climbing, ladder moving, and the ring-width of a polygon. *Amer. Math. Monthly*, 96(6):494–510.
- Greenwood, S. and Kennedy, J. (2012). Connected generalized inverse limits. *Topology Appl.*, 159(1):57–68.
- Greenwood, S. and Kennedy, J. (2014). Connectedness and ingram–mahavier products. *Topology Appl.*, 166:1–9.
- Greenwood, S., Kennedy, J., and Lockyer, M. (2017). Connectedness and inverse limits with set-valued functions on intervals. *Topology Appl.*, 221:69–90.
- Ingram, W. (2009). Inverse limits of upper semi-continuous functions that are unions of mappings. In *Topology Proc.*, volume 34, pages 17–26.
- Ingram, W. (2012a). Concerning nonconnected inverse limits with upper semi-continuous set-valued functions. 40:203–214.
- Ingram, W. (2012b). *An introduction to inverse limits with set-valued functions*. Springer Briefs, Springer.
- Ingram, W. and Mahavier, W. S. (2006). Inverse limits of upper semi-continuous set valued functions. 32:119–130.

Ingram, W. and Marsh, M. (2013). Nonconnectedness of inverse limit sequences. 41:333–336.

Ingram, W. T. and Mahavier, W. S. (2011). *Inverse limits: From continua to Chaos*, volume 25. Springer Briefs, Springer.

Nall, V. C. (2012). Connected inverse limits with a set-valued function. 40:167.